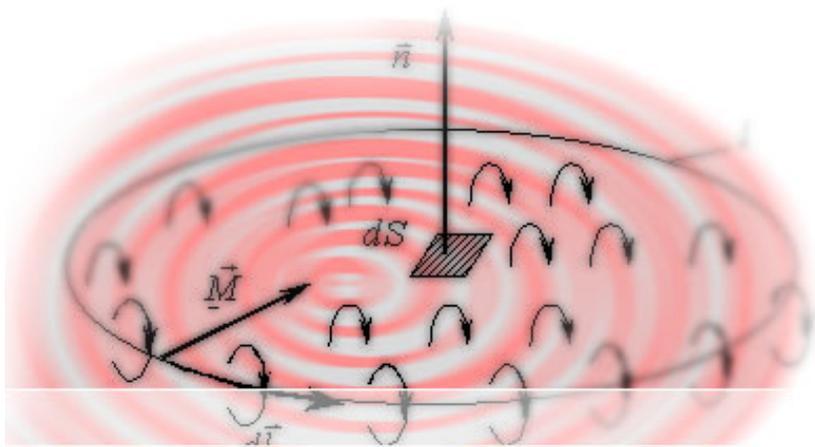


**МГТУ им. Н.Э.Баумана**

**физика в** **3** **том**  
техническом университете

под ред. Л.К.Мартинсона А.Н.Морозова



об учебнике |  
содержание |  
поиск |

**А.М. Макаров Л.А. Лунёва**

# **ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА**

**Об учебнике**

***Том 3 курса системы открытого образования "Физика в техническом университете"***

***ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА***

В 3 томе шеститомного курса "Физика в техническом университете" рассмотрены основные положения электромагнитной теории (до уравнений Максвелла включительно), необходимые как для изучения курса физики (раздел "Электромагнитные волны и оптика"), так и для других курсов инженерного образования. В том включен необходимый минимум сведений из векторного анализа, облегчающий изучение студентами этой части физики.

Все разделы тома содержат примеры решения задач, расширяющих изложение теоретического материала, а также задачи для самостоятельного решения.

Том предназначен для студентов 3 семестра МГТУ им. Н.Э. Баумана, продолжающих изучение физики в ВУЗе после изучения разделов "Механика" и "Физические основы термодинамики".

Курс для системы открытого образования создан на основе курса лекций, читаемого в течение трех семестров студентам 1 и 2 курсов МГТУ им. Н.Э. Баумана. Программа соответствует требованиям, предъявляемым к курсу физики в техническом университете и ее объем - 390 часов.

**Электронное учебное пособие состоит из 6 частей:**

- 1. Физические основы механики (А.М. Афонин)**
- 2. Физическая термодинамика (К.В. Глаголев, А.Н. Морозов)**
- 3. Основы электромагнетизма (А.М. Макаров, Л.А. Лунева)**
- 4. Электромагнитные волны и оптика (О.С. Литвинов, К.Б. Павлов, В.С. Горелик)**
- 5. Квантовая теория (Л.К. Мартинсон, Е.В. Смирнов)**
- 6. Физика твердого тела (Б.Е. Винтайкин)**

Для использования курса необходим стандартный браузер типа MS Internet Explorer 5.0.

Программная реализация курса создана на кафедре физики МГТУ в процессе выполнения проекта (код 1.1.2.5(104).039) по программе "СОЗДАНИЕ СИСТЕМЫ ОТКРЫТОГО ОБРАЗОВАНИЯ" в 2001-2002 г.г.

Если у Вас возникли вопросы по работе с системой, обратитесь к [руководству пользователя](#).

## Содержание

### **ВВЕДЕНИЕ**

#### **ГЛАВА 1. Электростатическое поле в вакууме**

- 1.1. Закон Кулона
- 1.2. Принцип суперпозиции для вектора напряженности электростатического поля
- 1.3. Потенциал электростатического поля
- 1.4. Теорема Гаусса для напряженности электростатического поля
- 1.5. Уравнение Пуассона для потенциала электростатического поля. Понятие о краевых задачах в теории потенциала и методах их решения

#### **ГЛАВА 2. Электростатическое поле в веществе (феноменологическое описание)**

- 2.1. Электрический диполь. Электрическое поле диполя
- 2.2. Электрический диполь во внешнем электрическом поле
- 2.3. Поляризованность среды. Диэлектрики и электреты
- 2.4. Теорема Гаусса для вектора поляризованности среды в интегральной и дифференциальной формах
- 2.5. Вектор  $D$ . Теорема Гаусса для вектора  $D$  в интегральной и дифференциальной формах
- 2.6. Соотношения на границе раздела двух диэлектриков для электрических величин

#### **ГЛАВА 3. Стационарное магнитное поле в вакууме**

- 3.1. опыты Эрстеда. опыты Ампера. опыты Кулона. Закон Био- Савара-Лапласа
- 3.2. Дифференциальная и интегральная формы теоремы Гаусса для вектора индукции магнитного поля
- 3.3. Векторный потенциал магнитного поля. Вихревой характер магнитного поля

#### **ГЛАВА 4. Магнитное поле в веществе (феноменологическое описание)**

- 4.1. Магнитный диполь
- 4.2. Магнитное поле контура с током
- 4.3. Магнитный диполь во внешнем магнитном поле
- 4.4. Магнитное поле в веществе. Гипотеза Ампера о молекулярных токах. Намагниченность вещества. Свойство намагниченности вещества. Напряженность магнитного поля
- 4.5. Соотношения на границе раздела двух магнетиков

#### **ГЛАВА 5. Квазистационарные магнитные явления**

- 5.1. Индуктивность
- 5.2. явление электромагнитной индукции

#### **ГЛАВА 6. Молекулярно-кинетические представления об электромагнитных свойствах сред**

- 6.1. Материальные уравнения среды
- 6.2. Природа электрического тока в веществе
- 6.3. Магнетики

6.4. Классическая теория электропроводности металлов Друде

6.5. Намагничивание парамагнетиков и поляризация диэлектриков внешним полем

## **ГЛАВА 7. Система уравнений максвелла как основа классической электродинамики**

7.1. Дифференциальная и интегральная формы системы уравнений Максвелла. Физическое содержание теории Максвелла

7.2. Основные свойства системы уравнений Максвелла

7.3. Основные следствия системы уравнений Максвелла

## **ГЛАВА 8. Классическая электродинамика и специальная теория относительности**

[титульная страница](#) | [наверх](#)

© 2002. МГТУ им. Н.Э.Баумана | Designed by krE[]Sote

[об учебнике](#) | [содержание](#) | [поиск](#)

## Поиск

Введите фрагмент для поиска:		Точно
Не учитывать порядок слов	Искать словосочетание	
Выдавать по	результатов на странице.	
Показывать не более	предложений из одного параграфа.	

При расширенном поиске осуществляется сканирование всего текста учебника и, таким образом, если искомый фрагмент существует в тексте, то Вы обязательно получите информацию о том, в каком разделе этот фрагмент находится. Однако процесс поиска может занять от 9 до 30 секунд в зависимости от загруженности сервера.

Включение флажка "*Точно*" позволяет искать только слова (словосочетания) строго соответствующие введенному фрагменту для поиска. Если этот флажок выключен, то подходящими считаются слова и выражения, содержащие введенный фрагмент. Например, если флажок "*Точно*" выключен, при запросе "**одно**" подходящими будут считаться разделы, содержащие слова: "**одно**", "**одного**", "**исходного**", "**свободного**" и т.п. Используйте это при построении запросов.

Положение переключателя "*Не учитывать порядок слов*" означает, что подходящими будут считаться предложения, содержащие все искомые слова без учета их взаимного расположения в предложении.

Положение переключателя "*Искать словосочетание*" означает, что порядок слов в запросе будет учтен при поиске.

Минимальная длина запроса - три буквы.

[титульная страница](#) | [наверх](#)

## Руководство пользователя

### **1. Описание внешнего вида страниц учебника, расположения и назначения основных ссылок.**

В электронной версии учебника используется 6 различных типов html-страниц:

1. Страницы, содержащие собственно текст учебника;
2. страницы: содержание, алфавитные указатели, поиск
3. страницы со списком ключевых слов (предметным и именовым указателями)
4. страницы с результатами поиска по ключевым словам
5. страницы с результатами расширенного поиска по всему тексту учебника
6. страницы, содержащие только пронумерованные формулы.

Однако, несмотря на различное назначение, большинство страниц имеют общие элементы. Вверху страницы (за исключением страниц 6-го типа) расположено изображение, содержащее краткую информацию об учебнике (авторы, название), под ним располагается набор ссылок основного меню учебника и окно для ввода запросов для поиска по ключевым словам. Внизу страниц расположены ссылки: "наверх" - перемещение наверх текущей страницы, "следующая", "предыдущая" - ссылки к следующей или предыдущей странице в тексте учебника. Также внизу страниц размещена ссылка на официальный сайт МГТУ им. Н.Э. Баумана, а также указан адрес электронной почты, на который можно присылать замечания и предложения по электронной версии учебника.

Для оперативного доступа к меню со страниц с большим объемом информации предусмотрено дублирование пунктов основного меню в нижней части окна Web-браузера, остающейся на экране при прокрутке (скроллинговании) информации в верхней части страницы.

Страницы с текстом учебника содержат ряд дополнительных ссылок, призванных сделать работу с учебником более удобной. Ключевые слова, упоминающиеся в тексте впервые (они выделены оранжевым курсивом) являются ссылками на разделы алфавитного указателя, посвященные соответствующим понятиям. Ссылками также являются упоминающиеся в тексте номера формул и параграфов (выделены темно бордовым цветом и при наведении на них указателя "мыши" становятся красными). При выборе ссылки на формулу открывается новое окно браузера, содержащие только: эту формулу, ее номер и ссылку "подробнее" на тот фрагмент текста, в котором речь идет об этой формуле (где она встречается впервые).

Остальные типы страниц, их назначение и основные ссылки, будут описаны ниже.

### **2. Основное меню.**

Основное меню представляет собой набор ссылок на "узловые" страницы электронной версии учебника, предназначенные для быстрого перемещения по тексту (это страницы "Об учебнике",

"Содержание", "Алфавитные указатели" и "Поиск"). Основное меню присутствует на каждой странице учебника в двух местах: вверху страницы под шапкой с названием и в нижней части окна браузера, постоянно находящейся на экране. Ниже описаны страницы, на которые ведут ссылки основного меню.

## **2.1. Об учебнике.**

В этом разделе помещено предисловие к электронной версии учебника, информация об авторах, а также ссылка на текст данного руководства.

## **2.2. Содержание.**

На эту страницу пользователь попадает, перейдя по ссылке "Содержание". Она является аналогом оглавления в печатной версии книги и представляет собой перечень глав и параграфов учебника. Каждое название - это ссылка на страницу с текстом соответствующего раздела. Со страницы "Содержание" можно перейти к любому параграфу учебника. А на эту страницу, в свою очередь, можно попасть с любой страницы учебника (кроме справочных страниц, содержащих только пронумерованные формулы) выбрав соответствующий пункт меню.

## **2.3. Алфавитные указатели.\***

Для облегчения поиска в учебнике информации по конкретным терминам или лицам были сформированы предметный и именной указатели. На каждой странице алфавитных указателей дается перечень ключевых терминов, понятий или имен, встречающихся в тексте учебника. Непосредственно под каждым ключевым словом располагается перечень параграфов и абзацев, в которых это понятие или имя встречаются. Если данное понятие имеет определение, то справа от ключевого слова присутствует ссылка "Определение", которая ведет на абзац с определением термина. Страницы указателей сгруппированы в алфавитном порядке и ссылки на них обозначаются буквой или слогом, на которые это слово начинается. Ссылка "Алфавитные указатели" основного меню веден на заглавную страницу группы страниц алфавитных указателей. Эта страница является своего рода оглавлением и содержит ссылки непосредственно на все страницы с предметным и именным указателями. Эти ссылки обозначены буквами соответствующими первым буквам ключевых слов, размещенных на той странице, на которую ведет ссылка.

Кроме того, в электронной версии учебника существует возможность поиска по списку ключевых слов. Форма для ввода запросов расположена в строке с основным меню вверху каждой страницы. Для того чтобы получить информацию о термине, содержащуюся в алфавитном указателе (т.е. ссылки на все разделы учебника, в которых это понятие встречается) надо ввести фрагмент искомого слова в окно для поиска и нажать на расположенную рядом пиктограмму (или клавишу "Enter"). Правила построения запросов и структура отображения результатов поиска описаны в разделе "Поиск по алфавитным указателям".

## **2.4. Поиск.**

На странице поиска, помимо стандартных элементов, присутствующих на всех страницах системы, расположена форма для ввода запросов и настройке поисковой машины, а также краткая инструкция по пользованию системой поиска. Подробно правила работы с поисковой машины изложены в следующей главе.

### 3. Правила работы с системой поиска информации.

В случае, когда необходимо найти информацию, связанную с конкретным словом или словосочетанием, можно воспользоваться встроенной системой поиска по учебнику. В системе существуют две разновидности поиска: поиск по алфавитным указателям (быстрый поиск) и поиск по всему тексту учебника (расширенный поиск).

#### 3.1. Поиск по алфавитным указателям. \*

Форма для ввода запросов этого варианта поиска размещена на каждой странице учебника в строке с основным меню (в верхней части страницы).

Для того чтобы посмотреть информацию о термине надо ввести фрагмент искомого слова в окно для поиска и нажать на расположенную рядом пиктограмму (или клавишу "Enter"). Длина вводимого фрагмента слова не должна быть меньше трех символов. В запросах разрешается использовать буквы, цифры, знаки препинания и пробелы (как разделители между словами). Если в запросе вводится более одного слова, то подходящими считаются записи из предметного или именного указателя, содержащие все слова запроса в любой последовательности.

Например, по запросу "**скор средн**" будут выданы следующие записи из предметного указателя:

- **средний квадрат скорости**
- **средняя квадратичная скорость**
- **средняя скорость**

Из этого примера видно, что для того чтобы получить все словоформы искомого понятия необходимо вводить только постоянную часть слова (не указывая, например, окончания).

В отличие от формы представления информации о ключевых словах, применяемой в алфавитных указателях, при поиске на экран выводятся фрагменты текста из всех абзацев учебника, в которых данный термин встречается, что, иногда, значительно увеличивает объем выдаваемой на экран информации, но позволяет быстрее найти самый подходящий фрагмент. Сам термин при этом выделяется в тексте жирным шрифтом. Предложения с ключевым словом являются ссылками на те абзацы в тексте, в которых они расположены.

Если искомый фрагмент не содержится в предметном и именном указателях в ответ на запрос будет выведено сообщение: "Необходимый Вам фрагмент не найден, попробуйте воспользоваться расширенным поиском".

В случае ошибки при построении запроса будет выдано сообщение: "Внимание! Запрос не введен или содержит ошибку".

#### 3.2. Расширенный поиск.

Доступ к механизму расширенного поиска возможен только со специализированной страницы поиска, попасть на которую можно с любой страницы учебника (кроме справочных страниц с формулами), перейдя по ссылке основного меню "Поиск".

При расширенном поиске осуществляется сканирование всего текста учебника и, таким образом, если искомый фрагмент существует в тексте, то Вы обязательно получите информацию о том, в каком

разделе (с точностью до абзаца) этот фрагмент находится. Однако процесс поиска может занять от 9 до 30 секунд в зависимости от загруженности сервера (без учета времени, затрачиваемого на передачу результатов поиска браузеру пользователя).

Чтобы определить разделы учебника, в которых искомое слово или словосочетание содержится, введите его в поле формы, расположенное рядом с фразой "Введите фрагмент для поиска:" и нажмите кнопку "Искать" или клавише "Enter" на клавиатуре.

Расположенная на странице поиска форма позволяет настраивать некоторые параметры поисковой машины.

Включение флажка "Точно" позволяет искать только слова (словосочетания) строго соответствующие введенному фрагменту для поиска. Если этот флажок выключен, то подходящими считаются слова и выражения, содержащие введенный фрагмент. Например, если флажок "Точно" выключен, при запросе "**одно**" подходящими будут считаться разделы, содержащие слова: "**одно**", "**одного**", "**исходного**", "**свободного**" и т.п. Используйте это при построении запросов: для того чтобы получить все словоформы искомого понятия необходимо вводить только постоянную часть слова (не указывая, например, окончания).

Положение переключателя "Не учитывать порядок слов" означает, что подходящими будут считаться предложения, содержащие все искомые слова без учета их взаимного расположения в предложении.

Положение переключателя "Искать словосочетание" означает, что порядок слов в запросе будет учтен при поиске.

Минимальная длина запроса - три буквы. В запросах разрешается использовать буквы, цифры, знаки препинания и пробелы (как разделители между словами).

Результатом поиска является набор ссылок на те абзацы текста, в которых встречается искомое слово. Ссылки сгруппированы по параграфам и абзацам, в которых это понятие встречается.

Вверху страницы с результатами поиска указано сколько раз запрашиваемое слово встречается в тексте и количество параграфов, в которых это слово встречается. Затем идет перечень параграфов содержащих слово (слова или словосочетание) запроса. Записи отсортированы в порядке убывания количества упоминаний искомого слова в тексте параграфа (чем большее количество раз искомое слово (слова) содержится в параграфе, тем выше расположена ссылка на него).

Каждая запись в списке результатов поиска содержит порядковый номер, название главы и название параграфа, являющиеся ссылками на этот параграф, а также набор фрагментов предложений из этого параграфа, содержащих слова запроса. Выдаваемые фрагменты предложений из каждого параграфа (максимальное их количество можно регулировать) являются ссылками на те абзацы, в которых они находятся.

Если общее количество записей (количество параграфов, в которых найдены слова запроса) больше числа записей разрешенного для вывода на одной странице, то чтобы перейти к следующим записям надо выбрать ссылку на соответствующую страницу с результатами поиска, расположенную внизу страницы.

Если запрашиваемое слово в тексте учебника отсутствует, система выдаст сообщение

Форма поиска позволяет настраивать страницы с результатами поиска. Можно задать максимальное количество результатов поиска выдаваемых на одной странице. Также возможно задать максимальное число выдаваемых на экран предложений из каждого параграфа, содержащих искомое слово.

---

\*) В некоторых учебниках серии "Физика в техническом университете" алфавитные указатели могут отсутствовать. Они будут добавлены в систему по мере готовности.

[наверх](#)

## Об учебнике

**Том 3 курса системы открытого образования "Физика в техническом университете"**

### **ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА**

В 3 томе шеститомного курса "Физика в техническом университете" рассмотрены основные положения электромагнитной теории (до уравнений Максвелла включительно), необходимые как для изучения курса физики (раздел "Электромагнитные волны и оптика"), так и для других курсов инженерного образования. В том включен необходимый минимум сведений из векторного анализа, облегчающий изучение студентами этой части физики.

Все разделы тома содержат примеры решения задач, расширяющих изложение теоретического материала, а также задачи для самостоятельного решения.

Том предназначен для студентов 3 семестра МГТУ им. Н.Э. Баумана, продолжающих изучение физики в ВУЗе после изучения разделов "Механика" и "Физические основы термодинамики".

Курс для системы открытого образования создан на основе курса лекций, читаемого в течение трех семестров студентам 1 и 2 курсов МГТУ им. Н.Э. Баумана. Программа соответствует требованиям, предъявляемым к курсу физики в техническом университете и ее объем - 390 часов.

**Электронное учебное пособие состоит из 6 частей:**

- 1. Физические основы механики (А.М. Афонин)**
- 2. Физическая термодинамика (К.В. Глаголев, А.Н. Морозов)**
- 3. Основы электромагнетизма (А.М. Макаров, Л.А. Лунёва)**
- 4. Электромагнитные волны и оптика (О.С. Литвинов, К.Б. Павлов, В.С. Горелик)**
- 5. Квантовая теория (Л.К. Мартинсон, Е.В. Смирнов)**
- 6. Физика твердого тела (Б.Е. Винтайкин)**

Для использования курса необходим стандартный браузер типа MS Internet Explorer 5.0.

Программная реализация курса создана на кафедре физики МГТУ в процессе выполнения проекта (код 1.1.2.5(104).039) по программе "СОЗДАНИЕ СИСТЕМЫ ОТКРЫТОГО ОБРАЗОВАНИЯ" в 2001-2002 г.г.

Если у Вас возникли вопросы по работе с системой, обратитесь к [руководству пользователя](#).

## ВВЕДЕНИЕ

Основными понятиями современной классической теории электромагнетизма являются понятие электрического заряда  $q$  и понятие электромагнитного поля. Электрические заряды (движущиеся и неподвижные) формируют в пространстве электромагнитное поле, которое проявляется в силовом воздействии на материальные тела, обладающие электрическим зарядом.

Электрический заряд  $q$  является скалярной величиной и может иметь положительное или отрицательное значение. Величина электрического заряда является инвариантом относительно преобразований Лоренца: во всех инерциальных системах отсчета эта величина одинакова (масса тела этим свойством не обладает).

В некоторых физических явлениях приходится учитывать "квантованность" электрического заряда, то есть учитывать, что электрический заряд тела состоит из конечного числа мельчайших элементарных зарядов. Элементарный заряд численно равняется заряду электрона

$$e_0 = \pm 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ К л.}$$

Электромагнитное поле существует как объективная реальность и обладает такими атрибутами как масса, импульс и энергия. Электромагнитное поле может превращаться в вещество - рождение электронно-позитронных пар - и может порождаться веществом - аннигиляция электронно-позитронной пары.

Силовое воздействие на материальную точку можно определить, используя второй закон Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (1)$$

где  $m$  - масса,  $\vec{a}$  - ускорение материальной точки.

Соотношения кинематики

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}, \quad (2)$$

где  $\vec{v}$  - скорость,  $\vec{r}$  - радиус-вектор материальной точки, позволяют по наблюдениям закона движения материальной точки  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  определить величину  $\vec{F}$  в уравнении (1).

Обобщением совокупности известных опытных фактов является выражение для обобщенной силы Лоренца:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (3)$$

Здесь  $\vec{F}$  - сила, действующая на материальную точку с зарядом  $q$ ,  $\vec{E}$  - напряженность электрического поля,  $\vec{B}$  - индукция магнитного поля. Силовые характеристики электромагнитного поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  - должны быть определены в каждой точке пространства и могут зависеть от времени:

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t) ; \quad \vec{B} = \vec{B}(x, y, z, t) \quad (4)$$

В соотношении (3) подразумевается, что величины  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  вычисляются для фиксированного момента времени  $t$  в точке расположения электрического заряда  $q$ . При этом напряженность электрического поля  $\vec{E}$  и индукция магнитного поля  $\vec{B}$  представляют собой составляющие электромагнитного поля, внешнего по отношению к заряду  $q$ . Смысл сказанного состоит в том, что предполагается, что электромагнитное поле, создаваемое самим зарядом  $q$ , на заряд  $q$  не действует. Другими словами говоря, поле  $\vec{E}$  и поле  $\vec{B}$  в соотношении (3) созданы другими зарядами, неподвижными или движущимися. Из соотношения (3) следует, что напряженность электрического поля  $\vec{E}$  - это та часть (составляющая) электромагнитного поля, которая связана с местонахождением заряда, в то время как индукция магнитного поля  $\vec{B}$  связана со скоростью движения электрического заряда.

Из сказанного выше следует, что пространственные и временные изменения электрического поля  $\vec{E}$  и магнитного поля  $\vec{B}$  должны быть согласованы между собой, должны учитывать распределение и движение электрических зарядов и, наверное, учитывать электромагнитные свойства среды, в которой рассматривается описываемое явление. Действительно, существует замкнутая система уравнений электродинамики - система уравнений Максвелла - она достаточно сложна, с ней мы познакомимся в конце курса.

Следует заметить, что местоположение и скорость материальной точки в двух различных инерциальных системах отсчета, естественно, различны, поэтому деление электромагнитного поля на электрическое и магнитное имеет условный характер, хотя и является удобным приемом при проведении практических расчетов.

[предыдущая](#) | [наверх](#) | [следующая](#)

© 2002. МГТУ им. Н.Э.Баумана | Designed by krE[Sote]

[об учебнике](#) | [содержание](#) | [поиск](#)

## ГЛАВА 1. Электростатическое поле в вакууме

### 1.1. Закон Кулона

Простейшим и исторически первым примером формирования электрическим зарядом электромагнитного поля является закон Кулона. Закон Кулона описывает взаимодействие двух неподвижных точечных зарядов в однородной среде в отсутствие других зарядов в системе. Его "полевая" форма имеет вид:

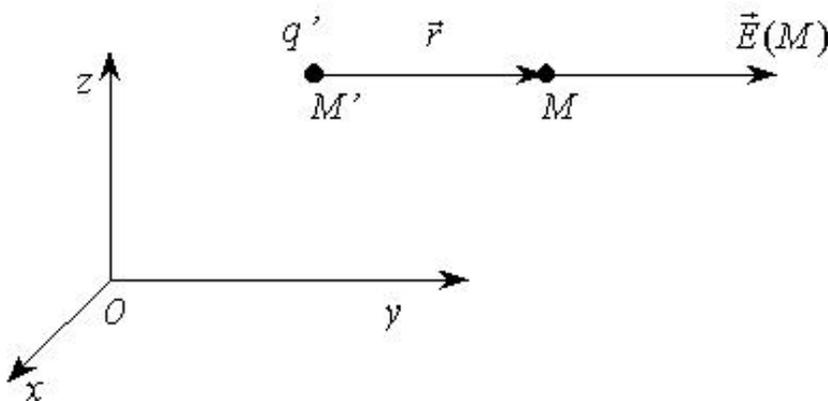


Рис. 1.1.

Напряженность электростатического поля точечного заряда

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \quad (1.1)$$

Здесь  $q'$  - электрический заряд, который создает электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}$ ,  $\vec{r}$  - вектор, проведенный из точки нахождения заряда  $q'$  в точку наблюдения,  $\epsilon_0$  - электрическая

постоянная. Напряженность электростатического поля равна отношению силы, действующей на неподвижный электрический заряд, к величине заряда. Значение электрической постоянной  $\varepsilon_0$  зависит от выбора системы единиц. В системе СИ  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м.

С примерами формирования электромагнитного поля движущимися электрическими зарядами мы познакомимся позже.

В последующих разделах более подробно рассмотрим систему неподвижных электрических зарядов и создаваемое этой системой электростатическое поле в условиях вакуума.

[предыдущая](#) | [наверх](#) | [следующая](#)

© 2002. МГТУ им. Н.Э.Баумана | Designed by krE[Sote]

[об учебнике](#) | [содержание](#) | [поиск](#)

## ГЛАВА 1. Электростатическое поле в вакууме

### 1.2. Принцип суперпозиции для вектора напряженности электростатического поля

Напряженность электрического (электростатического) поля  $\vec{E}$ , образованного единичным точечным зарядом  $q'$ , определена соотношением (1.1). Если в системе имеется  $n$  электрических точечных зарядов  $q'_i$ ,  $i = 1, n$ , то напряженность результирующего поля  $\vec{E}$  определяется как сумма напряженности полей  $\vec{E}_i$ , образованных каждым из зарядов в отдельности:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i, \quad \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_i}{(r - r'_i)^2} \cdot \frac{(r - r'_i)}{|r - r'_i|}, \quad i = 1 \dots n. \quad (1.2)$$

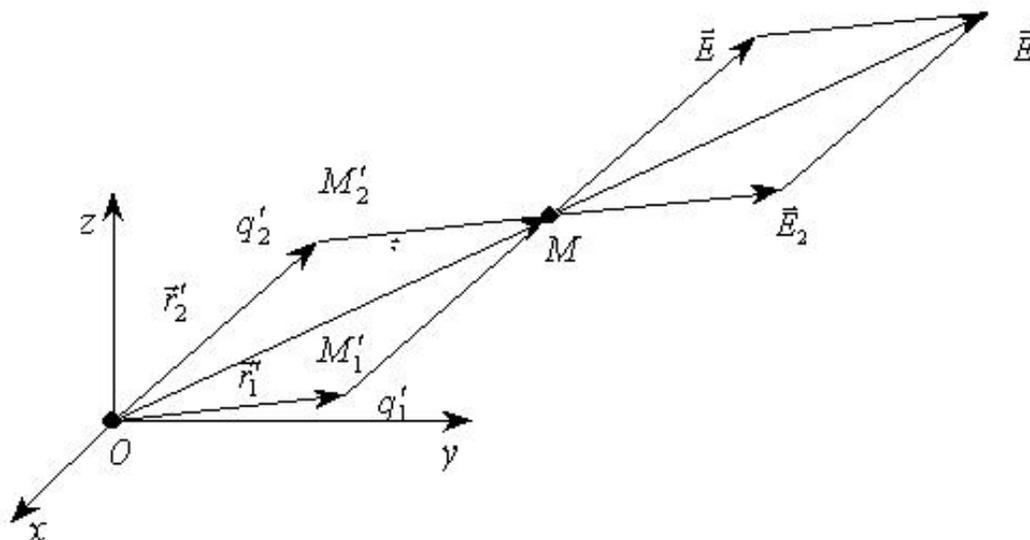


Рис. 1.2.

Принцип суперпозиции для вектора напряженности электростатического поля

Здесь  $\vec{r}$  - радиус-вектор точки наблюдения,  $\vec{r}_i$  - радиус-вектор точки расположения электрического заряда  $q_i$ .

Сложение в выражении (1.2) выполняется по правилу треугольника или параллелограмма, "геометрически", по правилу сложения векторных величин, то есть по-координатно:

$$E_x = \sum_{i=1}^n E_{ix}, \quad E_y = \sum_{i=1}^n E_{iy}, \quad E_z = \sum_{i=1}^n E_{iz}. \quad (1.3)$$

При вычислении проекций вектора  $\vec{E}_i$  на оси декартовых координат удобно через  $(x, y, z)$  обозначить координаты точки наблюдения, а через  $(x', y', z')$  с индексом  $i$  - номер электрического заряда - координаты заряда  $q_i$ .

В этом случае имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} r_{ix} &= x - x_i', & r_{iy} &= y - y_i', & r_{iz} &= z - z_i' \\ r_i &= \left[ (x - x_i')^2 + (y - y_i')^2 + (z - z_i')^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Для направляющих косинусов вектора  $\vec{E}$  имеем:

$$\cos \alpha = \frac{E_x}{E}; \quad \cos \beta = \frac{E_y}{E}; \quad \cos \gamma = \frac{E_z}{E}; \quad E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}. \quad (1.5)$$

Еще раз подчеркнем, что при сложении электрических полей отдельно "складываются" проекции вектора  $\vec{E}$  и только потом вычисляется модуль полученного вектора.

*Непрерывное распределение электрических зарядов.*

В практически интересных случаях суммарный электрический заряд  $q'$  можно считать распределенным по известному закону по конечному или бесконечному объему, поверхности или вдоль пространственной линии. В этих случаях удобно ввести - *объемную плотность электрического заряда*  $\rho'$ :

$$dq' = \rho' dV', \quad (1.6)$$

где  $dV'$  - элемент объема (дифференциал объема) рассматриваемого тела,  $dq'$  - электрический заряд этого элемента;

- *поверхностную плотность электрического заряда*  $\sigma'$ :

$$dq' = \sigma' dS', \quad (1.7)$$

где  $dS'$  - элемент площади поверхности,  $dq'$  - электрический заряд этого элемента;

- *линейную (погонную) плотность электрического заряда*  $\lambda'$ :

$$dq' = \lambda' dl', \quad (1.8)$$

где  $d\vec{l}'$  - элемент длины пространственной кривой.

Величины  $dV'$ ,  $dS'$  и  $d\vec{l}'$  являются физически бесконечно малыми величинами, поэтому элементарные заряды  $dq'$  можно считать точечными. Поле точечного электрического заряда известно:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (1.9)$$

здесь  $d\vec{E}$  - дифференциал напряженности электрического поля в точке наблюдения с радиусом-вектором  $\vec{r}$ , создаваемого элементарным зарядом  $dq'$ , расположенным в точке с радиусом-вектором  $\vec{r}'$ . Величина  $dq'$  определена одним из выражений (1.6), (1.7) или (1.8). Остается только просуммировать выражение (1.9) по всем элементарным зарядам системы. Формальное решение задачи имеет вид:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho'(\vec{r}') \left[ \vec{r} - \vec{r}' \right]}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV', \quad (1.10)$$

для заряженного объема,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma'(\vec{r}') \left[ \vec{r} - \vec{r}' \right]}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS', \quad (1.11)$$

для заряженной поверхности,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\lambda'(\vec{r}') \left[ \vec{r} - \vec{r}' \right]}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dl', \quad (1.12)$$

для заряженной линии конечных или бесконечных размеров. В выражениях (1.10), (1.11) и (1.12) интегрирование проводится по "штрихованным" переменным, координаты точки наблюдения  $\vec{r}$  или  $(x, y, z)$  играют при этом роль параметров.

Физический смысл соотношений (1.2), (1.10), (1.11) и (1.12) состоит в том, что при известном расположении зарядов в пространстве (дискретное или непрерывное распределение) напряженность электрического поля  $\vec{E}$  может быть вычислена для произвольной точки пространства.

Читателям, не владеющим понятиями объемного, поверхностного и (или) линейного интеграла, можно посоветовать пользоваться формулами (1.2). При этом роль величин  $q'_i$  будут играть произведения  $\rho' \cdot \Delta V'$ ,  $\sigma' \cdot \Delta S'$  и (или)  $\lambda' \cdot \Delta l'$ , где  $\Delta V'$ ,  $\Delta S'$  и (или)  $\Delta l'$  должны выбираться достаточно малыми, чтобы каждый из описанных электрических зарядов можно было бы считать точечным. Последнее выполняется, если характерный линейный размер элемента объема, элемента площади поверхности или элемента длины будет значительно меньше расстояния от этого элемента до точки наблюдения.

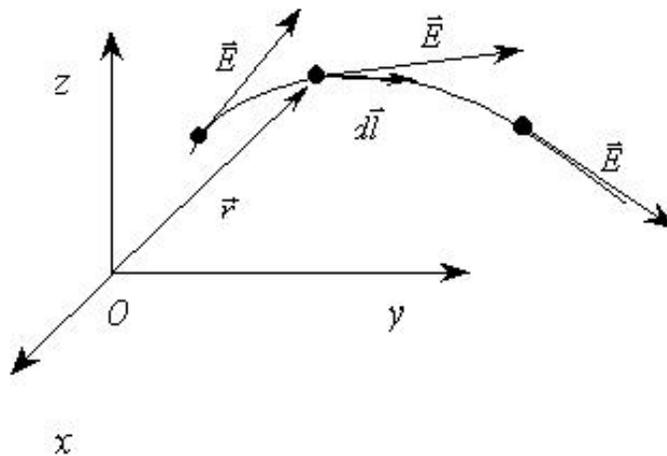


Рис. 1.3.

### Силовая линия вектора напряженности электростатического поля

Современное математическое обеспечение персональных компьютеров значительно облегчает конкретные расчеты поля неподвижных зарядов по заданному пространственному распределению последних.

Векторное поле можно описать с помощью понятия "силовая линия". Силовая линия векторного поля определяется как линия, в каждой точке которой направление вектора совпадает с касательной к линии, проведенной в этой точке.

Указанному определению соответствуют два эквивалентных уравнения:

$$d\vec{l} = \alpha \vec{E}, \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha - \text{скаляр} \quad (1.13)$$

и

$$d\vec{l} \times \vec{E} = 0. \quad (1.14)$$

И первое и второе уравнение - это запись условия параллельности элемента  $d\vec{l}$  длины силовой линии и вектора  $\vec{E}$  (т.е. векторного поля в данной точке пространства).

Из уравнений (1.13) или (1.14) следуют соотношения

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}. \quad (1.15)$$

Уравнения (1.15) - дифференциальные уравнения силовой линии. Зависимости  $E_x(x, y, z)$ ,  $E_y(x, y, z)$  и  $E_z(x, y, z)$  могут оказаться достаточно сложными, поэтому аналитически проинтегрировать систему (1.15) в общем случае не удается.

Численные методы обладают значительно более широкими возможностями. Действительно, пусть точка  $\{x_0, y_0, z_0\}$  принадлежит силовой линии, в этой точке известны  $E_x, E_y, E_z$ , причем (для определенности)  $E_x \neq 0$ . Если задаться величиной смещения вдоль оси  $x$  на  $dx$ , то получаем:

$$dy = \frac{E_y}{E_x} dx, \quad dz = \frac{E_z}{E_x} dx. \quad (1.16)$$

Но тем самым мы определили координаты точки  $\{x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz\}$ , которая тоже принадлежит силовой линии. Повторяя этот процесс, можно последовательно получить координаты всех точек, образующих силовую линию, проходящую через начальную точку  $\{x_0, y_0, z_0\}$ .

Трудности реализации описанной процедуры возникают, если система уравнений (1.15) рассматривается в окрестности так называемой "особой точки" системы.

Пользуясь понятием "силовая линия векторного поля", следует иметь в виду два обстоятельства: Силовых линий существует бесконечное множество.

Силовая линия сама по себе не содержит информации о величине вектора.

В силу сказанного описание векторного поля с помощью силовых линий не может быть полным, однако, графическое представление совокупности отдельных силовых линий, их геометрические закономерности помогают глубже понять свойства изучаемого векторного поля.

*Задача 1. Три одинаковых заряда  $q$  расположены на осях декартовой системы координат на расстоянии  $a$  от начала координат. Найти проекции поля  $\vec{E}$  на оси координат в точке  $\{x_0, y_0, z_0\}$  и модуль вектора  $\vec{E}$  в той же точке.*

*Задача 2. Шар радиуса  $a$  заряжен электрическим зарядом с постоянной объемной плотностью заряда  $\rho$ . Показать, что вектор  $\vec{E}$  в центре шара равен нулю.*

*Задача 3. Сфера радиуса  $a$  заряжена электрическим зарядом с поверхностной плотностью  $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ , где  $\theta$  - угол между направлениями на полюс сферы и радиус-вектором  $\vec{r}'$ , описывающим положение элемента площади поверхности сферы. Определить вектор  $\vec{E}$  в центре сферы и его модуль.*

*Задача 4. Отрезок прямой линии длиной  $l$  заряжен электрическим зарядом с постоянной по длине линейной плотностью заряда  $\lambda$ . Найти вектор  $\vec{E}$  в точке  $A$ , которая лежит на перпендикуляре к одному из концов отрезка на расстоянии  $a$  от него.*

*Задача 5. Плоский круглый диск радиуса  $a$  несет электрический заряд постоянной поверхностной плотности  $\sigma$ . Вычислить вектор  $\vec{E}$  на оси симметрии диска, перпендикулярной его поверхности, на расстоянии  $z$ . Вычислить  $\vec{E}$  в приближении  $z \gg a$  и в приближении  $z \ll a$  и пояснить физический смысл полученных результатов.*

*Задача 6. Точечный электрический заряд помещен в точке пространства с координатами  $\{x_0, y_0, 0\}$ . Для силовых линий, лежащих в плоскости  $z = 0$ , получить уравнения зависимости*

$y = f(x)$ , описывающие семейство силовых линий векторного поля  $\vec{E}$ .

[предыдущая](#) | [наверх](#) | [следующая](#)

© 2002. МГТУ им. Н.Э.Баумана | Designed by krE[Sote]



[об учебнике](#) | [содержание](#) | [поиск](#)



## ГЛАВА 1. Электростатическое поле в вакууме

### 1.3. Потенциал электростатического поля

Электрическое поле, создаваемое системой неподвижных электрических зарядов обладает свойством *потенциальности*: работа электрического поля по перемещению постоянного точечного заряда вдоль замкнутого контура равна нулю.

Рассмотрим электрическое поле одиночного точечного электрического заряда  $q'$ :

$$\vec{E} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (1.17)$$

где  $\vec{r}$  - вектор, проведенный из точки расположения заряда  $q'$  в точку наблюдения,  $r$  - модуль вектора  $\vec{r}$ . Если в точке наблюдения помещен точечный заряд  $q$ , то по определению понятия "напряженность электрического поля" имеем

$$\vec{F} = q\vec{E}, \quad (1.18)$$

где  $\vec{F}$  - сила, действующая на точечный заряд  $q$  со стороны электрического поля  $\vec{E}$ . Располагая зависимостью (1.18), легко написать выражение для элементарной работы  $dA$  по перемещению заряда  $q$  из точки  $M_1$ , описываемой вектором  $\vec{r}$ , в соседнюю точку  $M_2$ , описываемую вектором  $\vec{r} + d\vec{r}$ :

$$dA = q\vec{E} d\vec{r}. \quad (1.19)$$

Элементарное смещение  $d\vec{r}$  заряда  $q$  можно разложить на составляющую  $dr \frac{\vec{r}}{r}$ , параллельную вектору  $\vec{r}$ , и на составляющую  $d\vec{l} \cdot \vec{n}$ , перпендикулярную вектору  $\vec{r}$  (рис. 1.4):

$$d\vec{r} = dr \frac{\vec{r}}{r} + d\vec{l} \cdot \vec{n}, \quad (1.20)$$

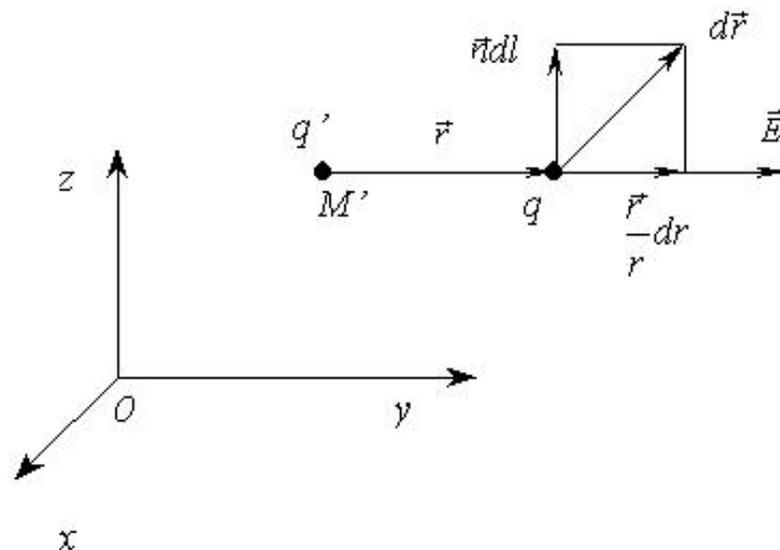


Рис. 1.4.

Схема элементарного перемещения точечного заряда в электростатическом поле заряда  $q'$ .

где  $\frac{\vec{F}}{r}$  - орт направления вдоль  $\vec{F}$ ,  $\vec{n}$  - орт направления, перпендикулярного направлению  $\vec{F}$ . По построению имеем  $\vec{F} \cdot \vec{n} = 0$ . В этом случае элементарная работа сил поля по перемещению заряда  $q$  с учетом соотношения (1.19) описывается выражением:

$$dA = q \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{F}}{r^3} dr \frac{\vec{F}}{r} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} d\left(-\frac{1}{r}\right). \quad (1.21)$$

При перемещении постоянного точечного заряда  $q$  из положения 1 в положение 2 имеем

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right). \quad (1.22)$$

Если перемещение заряда заканчивается в исходной точке, то, очевидно,  $r_2 = r_1$  и мы получаем

$$A_0 = 0, \quad (1.23)$$

где индексом "0" помечено, что перемещение осуществлялось по замкнутому контуру.

Поскольку электрическое поле образовано системой неподвижных зарядов, для каждого из них соотношение (1.23) справедливо, то можно утверждать, что описанным выше свойством

потенциальности обладает произвольное электростатическое поле.

Рассмотрим некоторые следствия из установленного принципа.

Если  $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$  произвольное векторное электростатическое поле;

$d\vec{r} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz$  - направленный отрезок контура  $l$ , то работу электростатического поля по перемещению положительного единичного точечного заряда можно описать с помощью криволинейного интеграла

$$\int_l (E_x dx + E_y dy + E_z dz). \quad (1.24)$$

Циркуляцией вектора  $\vec{E}$  по замкнутому контуру называют величину

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{r} = \oint_l (E_x dx + E_y dy + E_z dz). \quad (1.25)$$

В силу установленного выше принципа потенциальности электростатического поля выражение (1.25) должно обращаться в нуль для любого замкнутого контура  $l$ :

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{r} = \oint_l (E_x dx + E_y dy + E_z dz) = 0. \quad (1.26)$$

Условие (1.26) играет важную роль в электростатике: электростатическое поле реально существует, если только для него выполнено интегральное условие потенциальности (1.26).

Заметим, что условие (1.26) будет выполнено, если дифференциальная форма Пфаффа  $E_x dx + E_y dy + E_z dz$  является полным дифференциалом. Последнее влечет за собой необходимость выполнения совокупности условий:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0. \quad (1.27)$$

Условия (1.27) являются дифференциальными (локальными) условиями потенциальности поля  $\vec{E}(x, y, z)$ . Поле  $\vec{E}(x, y, z)$  является потенциальным в области, если условия (1.27) выполнены в каждой точке этой области.

Условия (1.27) можно компактно записать в векторной форме, если ввести в рассмотрение вектор "ротор" напряженности электрического поля  $\vec{E}$ :

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}, \quad (1.28)$$

где  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  - орты декартовой системы координат, определитель в (1.28) раскрывается по обычному правилу с тем условием, что дифференциальные операторы не должны стоять после функций  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ .

С использованием определения (1.28) условие потенциальности имеет вид:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (1.29)$$

Внутренняя связь условий (1.26) и (1.29) проявляется при рассмотрении теоремы Стокса:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_S \operatorname{rot} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS, \quad (1.30)$$

где  $S$  - произвольная гладкая поверхность, натянутая на контур  $l$ , а направление нормали  $\vec{n}$  к элементу площади поверхности  $dS$  выбрано так, чтобы с конца вектора  $\vec{n}$  обход контура  $l$  осуществлялся против часовой стрелки.

Если левая часть соотношения (1.30) равна нулю, то для произвольной поверхности  $S$  это эквивалентно требованию условия (1.29).

Заметим, что теорема Стокса (1.30) служит основой для формального определения компонент вектора  $\operatorname{rot} \vec{E}$  безотносительно к выбору системы координат:

$$\vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{r}}{S}. \quad (1.31)$$

Соотношением (1.31) определяется математический смысл понятия (1.28).

Потенциал электростатического поля вводят соотношением

$$d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz). \quad (1.32)$$

Легко видеть, что дифференциал потенциала  $\varphi$  равен элементарной работе против сил электростатического поля, совершаемой над единичным точечным зарядом на перемещении  $d\vec{r}$ .

Если в определении (1.32) учесть, что  $d\varphi$  - полный дифференциал, т.е.:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz, \quad (1.33)$$

и сравнить соответствующие члены в формулах (1.32) и (1.33), то легко получить:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (1.34)$$

В компактной форме записи формулы (1.34) имеют вид:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (1.35)$$

где вектор  $\operatorname{grad} \varphi$  определен соотношениями:

$$\operatorname{grad} \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (1.36)$$

Градиент скалярного поля выделяет направление наискорейшего возрастания скалярной функции, а его модуль численно равен максимальной интенсивности возрастания этой функции.

Скалярное поле часто описывают с помощью "поверхностей уровня", эквипотенциальных или изоповерхностей, которые определяются уравнением

$$\varphi(x, y, z) = C, \quad C - \text{ параметр.} \quad (1.37)$$

На эквипотенциальной поверхности

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = 0, \quad (1.38)$$

что можно переписать в векторном виде:

$$d\varphi = d\vec{r} \cdot \text{grad } \varphi = 0, \quad (1.39)$$

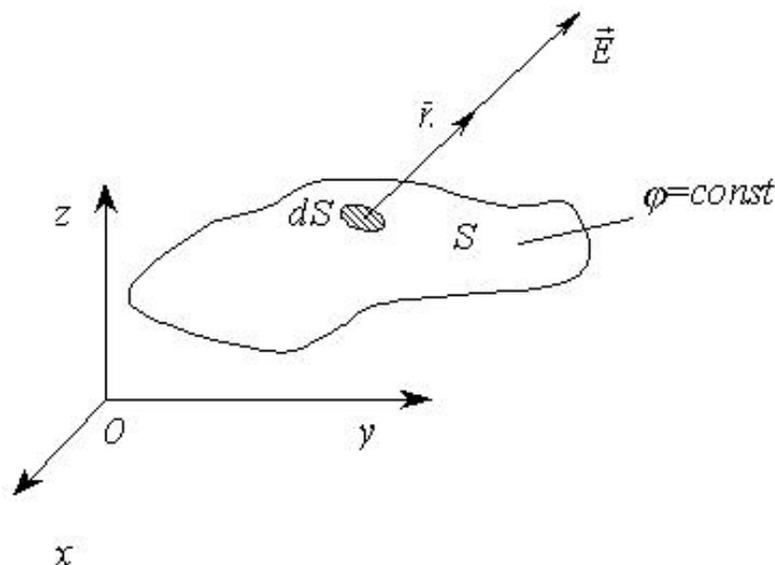


Рис. 1.5.

*Эквипотенциальная поверхность и вектор напряженности электростатического поля*

где  $d\vec{r}$  принадлежит поверхности  $\varphi = C$ . Из условия (1.39) следует, что вектор  $\text{grad } \varphi$  перпендикулярен любому вектору  $d\vec{r}$ , принадлежащему поверхности  $\varphi = C$ , то есть перпендикулярен элементу площади поверхности  $\varphi = C$ .

Если при этом вспомнить, что справедливо соотношение (1.35), то получим утверждение, что силовые линии электростатического поля должны быть перпендикулярны соответствующим элементам площади эквипотенциальной поверхности.

Заметим, что иногда встречается обозначение

$$\mathbf{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot \vec{n}, \quad (1.40)$$

где  $\vec{n}$  - вектор единичной нормали (величина безразмерная!) к поверхности  $\varphi = \text{const}$  в точке, в которой вычисляется вектор  $\mathbf{grad} \varphi$ , ориентированный в сторону увеличения  $\varphi$ ;  $n$  - обозначение координаты ( $n$  - величина, имеющая размерность длины) вдоль направления  $\vec{n}$ . Таким образом  $\mathbf{grad} \varphi$  - вектор, направленный вдоль описанного выше направления  $\vec{n}$  и численно равный производной от величины  $\varphi$  по координате  $n$  вдоль этого направления.

Соотношением (1.32) потенциал произвольной точки пространства определен с точностью до произвольной постоянной:

$$\varphi = \varphi_0(x_0, y_0, z_0) - \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad (1.41)$$

При решении большого числа задач (но не всех!) удобно считать, что точка с координатами  $\{x_0, y_0, z_0\}$  расположена "на бесконечности", а потенциал ее равен нулю.

Следует иметь в виду, что "силовое" проявление электростатического поля (формула (1.35)) связано с производными от потенциала, при этом нет нужды учитывать "произвольную постоянную". В задачах, использующих энергетические характеристики отдельных элементов системы, необходимо иметь в виду, что потенциальная энергия системы определяется с точностью до одной произвольной постоянной, поэтому выбор произвольных постоянных для подсистем не может быть произвольным: энергии подсистем должны рассчитываться от одного уровня.

*Задача 1.*

*Проверить условие потенциальности (1.27) для вектора напряженности электростатического поля, образованного точечным электрическим зарядом, расположенным в произвольной точке пространства.*

*Задача 2. Используя определение ротора векторного поля в символической форме записи (1.31), получить выражения для его физических компонент в декартовой, цилиндрической и сферической системе координат.*

[предыдущая](#) | [наверх](#) | [следующая](#)

© 2002. МГТУ им. Н.Э.Баумана | Designed by krE[.]Sote

[об учебнике](#) | [содержание](#) | [поиск](#)

## ГЛАВА 1. Электростатическое поле в вакууме

### 1.4. Теорема Гаусса для напряженности электростатического поля

Пусть в некоторой области пространства известно векторное поле напряженности электростатического поля  $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$ . Допустим, что в окрестности фиксированной точки пространства имеется элемент поверхности площади  $dS$ , ориентацию которого можно задать с помощью вектора единичной (безразмерной) нормали  $\vec{n}$  к этому элементу поверхности. Поскольку элемент поверхности является двусторонним объектом, то направление нормали можно выбрать произвольно. Введем в рассмотрение объект

$$d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS, \quad (1.42)$$

вектор элемента площади поверхности. В соответствии с (1.42) этот вектор численно равен площади элемента поверхности, имеет размерность площади и направлен вдоль  $\vec{n}$ , то есть вдоль нормали к элементу поверхности.

Элемент потока вектора  $\vec{E}$  через площадку  $dS$  по определению равен скалярному произведению вектора  $\vec{E}$  и вектора  $d\vec{S}$ :

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E \cos \alpha \cdot dS. \quad (1.43)$$

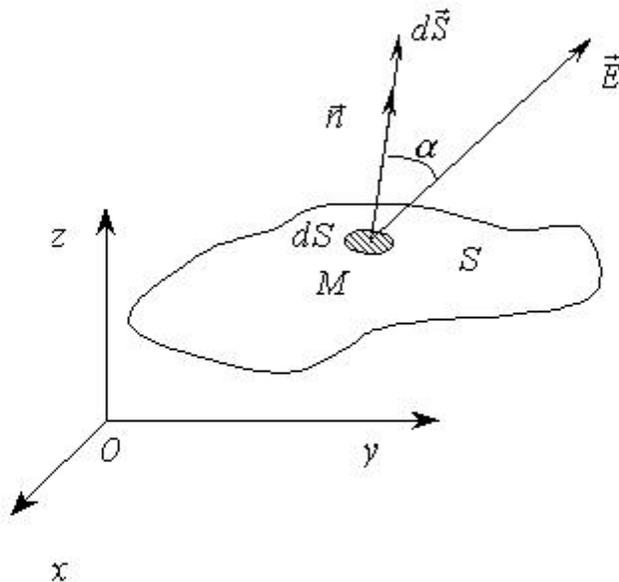


Рис. 1.6.

**Элементарный поток вектора напряженности электростатического поля**

Угол  $\alpha$  в выражении (1.43) измеряется между направлением вектора  $\vec{E}$  и направлением нормали  $\vec{n}$  к площадке  $dS$ . При  $\alpha = 0$ , то есть при  $\vec{E} \parallel \vec{n}$ , значение элемента потока вектора максимально, а при  $\vec{E} \perp \vec{n}$  ( $\alpha = \pi/2$ ) элемент потока обращается в нуль. Это свойство элемента потока легко понять, если привлечь понятие силовой линии векторного поля. В первом случае силовые линии перпендикулярны площадке  $dS$ , а во втором случае они "скользят" вдоль площадки, не пересекая ее. Заметим, что  $d\Phi < 0$ , если угол  $\alpha$  - тупой.

Если рассматривать поверхность конечных (или бесконечных) размеров, то можно определить поток вектора  $\vec{E}$  через эту поверхность:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (1.44)$$

В определении (1.44) подразумевается, что поверхность  $S$  достаточно гладкая, направления нормалей к двум соседним элементам поверхности не сильно различаются между собой. Последнее означает, что все элементы поверхности  $dS$  построены "на одной стороне" поверхности  $S$ . В случае бесконечных размеров поверхности  $S$ , а иногда и для поверхности конечных размеров, встает вопрос о существовании интеграла (1.44).

Если поверхность  $S$  является замкнутой поверхностью, то, как правило, поток вектора через поверхность  $S$  рассчитывают с использованием внешней нормали по отношению к объему, заключенному внутри поверхности  $S$ :

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \oint_S E \cos \alpha \cdot dS, \quad (1.45)$$

где кружок у интеграла означает, что поверхность  $S$  - замкнутая.

Поток вектора напряженности электростатического поля через замкнутую поверхность обладает специфическим свойством: его величина пропорциональна электрическому заряду, расположенному внутри этой поверхности. Это утверждение составляет физический смысл теоремы Гаусса. Теорема Гаусса для вектора напряженности электростатического поля  $\vec{E}$  в вакууме является следствием закона Кулона. Теорема Гаусса имеет большое значение в теории электромагнетизма. Доказательство ее справедливости включает три этапа.

Первый этап. Допустим, что в начале координат помещен точечный электрический заряд  $q$ .

Напряженность электрического поля, созданного этим зарядом, описывается соотношением:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (1.46)$$

где  $\vec{r}$  - радиус-вектор точки наблюдения,  $r$  - его модуль. Окружим заряд  $q$  сферой радиуса  $r$ , центр которой совпадает с началом координат. Известно, что внешняя нормаль  $\vec{n}$  к элементу поверхности  $dS$  сферы направлена по радиусу:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}. \quad (1.47)$$

Поток вектора  $\vec{E}$  через поверхность сферы равен:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \frac{\vec{r}}{r} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.48)$$

Запомним этот результат.

Второй этап. Пусть поверхность  $S$  является произвольной достаточно гладкой замкнутой поверхностью, причем начало координат - место расположения заряда  $q$  - лежит внутри поверхности  $S$ . Заметим, что

$$\frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{n} \cdot d\vec{S}}{r^2} = \frac{dS \cdot \cos\alpha}{r^2} = d\Omega, \quad (1.49)$$

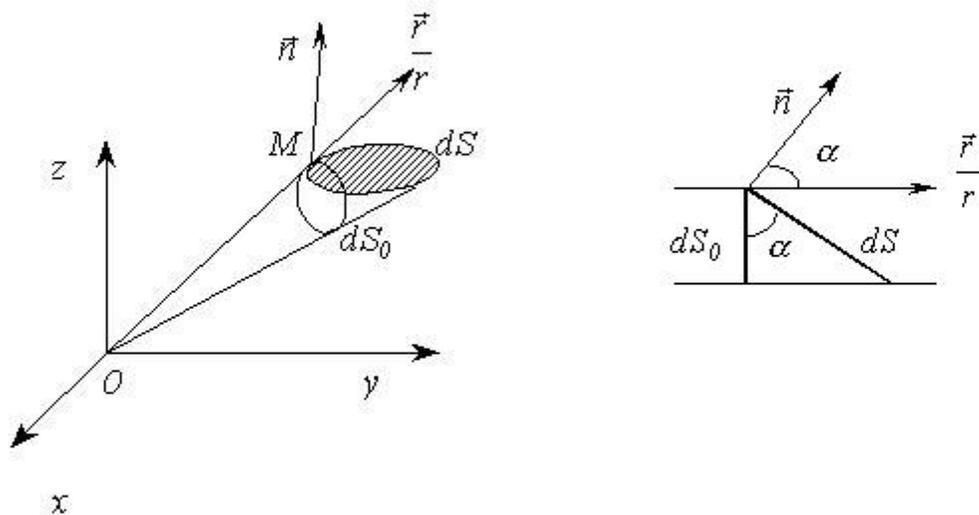


Рис. 1.7.

К определению элемента объемного угла. а) - пространственный случай б) - расчетная схема

где  $\alpha$  - угол между внешней нормалью  $\vec{n}$  и радиусом-вектором  $\vec{r}$  точки, в окрестности которой расположен элемент поверхности  $dS$ ;

$d\Omega$  - элемент телесного угла, под которым виден элемент поверхности  $dS$  из начала координат. В этом случае прямое вычисление потока вектора  $\vec{E}$  через замкнутую поверхность  $S$  приводит к результату

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r^3} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} d\Omega. \quad (1.50)$$

При записи (1.49) следует иметь в виду, что для строго выпуклой замкнутой поверхности  $S$  величина  $d\Omega > 0$  и суммарное значение интеграла в выражении (1.50) равно

$$\int_{\Omega} d\Omega = \Omega = 4\pi. \quad (1.51)$$

Если поверхность  $S$  не является строго выпуклой, то для части поверхности  $\cos\alpha > 0$ , а для части поверхности  $\cos\alpha < 0$ , в этом случае  $d\Omega$  является алгебраической величиной, но соотношение (1.51) остается справедливым.

Для случая, когда начало координат (т.е. точка расположения заряда  $q$ ) лежит вне замкнутой поверхности суммарное значение  $\Omega = 0$ ,

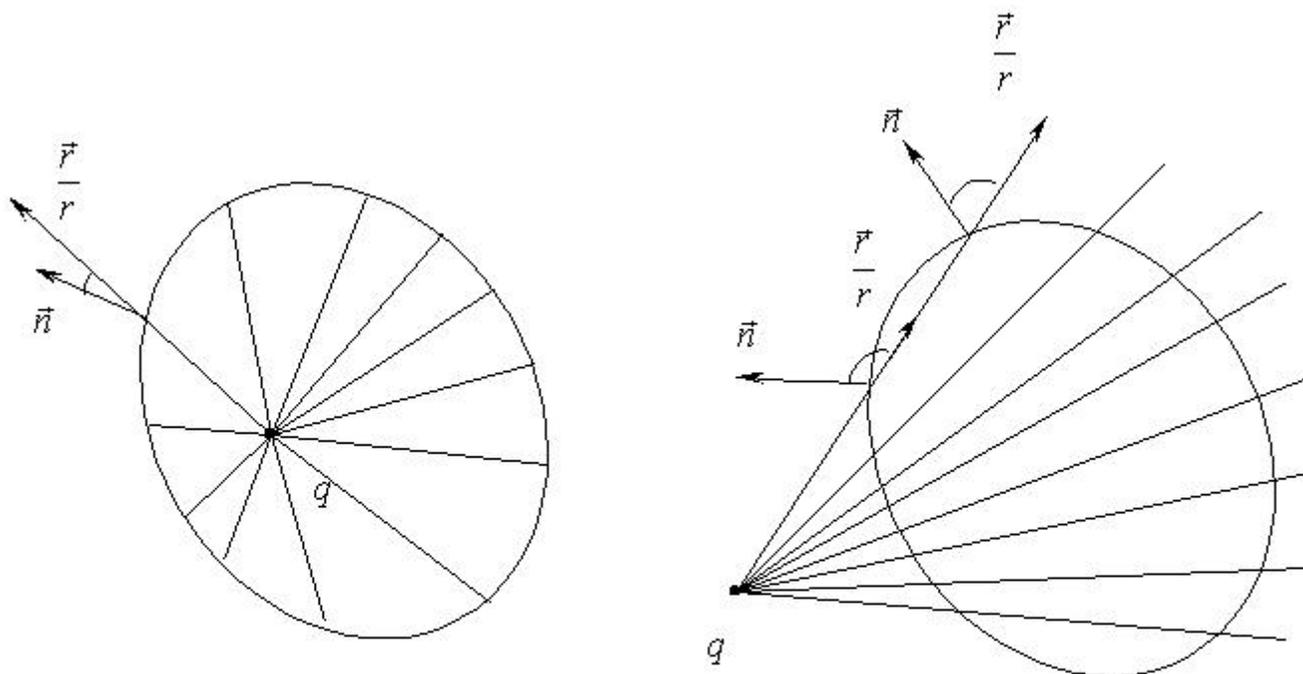


Рис. 1.8.

Поток вектора  $\vec{E}$  через замкнутую поверхность а) - точечный заряд  $q$  находится внутри контрольной поверхности ( $\Phi \neq 0$ ) б) - точечный заряд  $q$  находится вне контрольной поверхности ( $\Phi = 0$ )

поскольку видимая часть поверхности  $S_1$  и невидимая из начала координат часть поверхности  $S_2$  приводят к одному и тому же абсолютному значению телесного угла, но противоположных знаков.

Третий этап. Реальное электростатическое поле обусловлено совокупностью точечных зарядов (принцип суперпозиции), для каждого из которых соотношение

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1.52)$$

доказано для произвольной замкнутой поверхности  $S$ . Но тем самым доказана справедливость теоремы Гаусса для произвольного электростатического поля: поток вектора напряженности электростатического поля через произвольную замкнутую поверхность  $S$  равен суммарному электрическому заряду, находящемуся внутри поверхности  $S$ , деленному на величину  $\epsilon_0$ .

Заметим, что соотношение (1.52) справедливо для системы единиц СИ.

То обстоятельство, что замкнутая поверхность  $S$  в формулировке теоремы Гаусса может быть произвольной, позволяет выбрать ее форму при решении конкретной задачи удобным для исследователя способом.

Использование теоремы Гаусса в интегральной форме (1.52) в отдельных случаях, отличающихся высокой степенью симметрии расположения электрических зарядов в пространстве, позволяет эффективно рассчитывать характеристики электростатического поля.

В общем случае теорема Гаусса в форме (1.52) может служить для получения оценок характерных величин электростатического поля.

Теорема Гаусса для вектора напряженности электростатического поля  $\vec{E}$  может быть сформулирована и в дифференциальной форме, отражающей локальные свойства электростатического поля.

Действительно, рассмотрим поле точечного электрического заряда  $q$ , расположенного в начале координат:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (1.53)$$

Из соотношения (1.53) следует

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \\ E_y &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \\ E_z &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Легко проверить, что для  $r \neq 0$ , то есть для точки наблюдения, в которой нет электрического заряда, справедливо соотношение:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \quad (1.55)$$

Математическая операция в левой части соотношения (1.55) имеет специальное название "дивергенция векторного поля  $\vec{E}$ " и специальное обозначение

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (1.56)$$

Очевидно, что результат (1.55) можно записать в форме:

$$\text{div } \vec{E} = 0. \quad (1.57)$$

Нетрудно сообразить, что формула (1.57) будет иметь силу и для произвольного электростатического поля в каждой точке, где отсутствует электрический заряд.

Если в окрестности начала координат имеется объемная плотность электрического заряда  $\rho$  и рассматриваются расстояния от начала координат настолько малые, что величину  $\rho$  можно считать постоянной величиной, то напряженность электростатического поля в окрестности начала координат может быть определена соотношением:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}, \quad (1.58)$$

где  $\vec{E}_0$  - напряженность электрического поля, создаваемого зарядами вне рассматриваемой окрестности,  $\vec{E}_0$  - векторная постоянная величина. В проекциях на оси декартовой системы координат имеем:

$$E_x = E_{0x} + \frac{\rho}{3\epsilon_0}x, \quad E_y = E_{0y} + \frac{\rho}{3\epsilon_0}y, \quad E_z = E_{0z} + \frac{\rho}{3\epsilon_0}z. \quad (1.59)$$

Вычисляя дивергенцию векторного поля (1.58) - (1.59), получаем

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.60)$$

При  $\rho = 0$  из соотношения (1.60) следует соотношение (1.57).

Соотношение (1.60) является дифференциальной формулировкой теоремы Гаусса для векторного поля  $\vec{E}$ .

Заметим, что дифференциальная формулировка теоремы Гаусса для векторного поля  $\vec{E}$  (1.60) непосредственно следует из интегральной формулировки (1.52).

Действительно, в силу математической теоремы Остроградского-Гаусса имеет место соотношение

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_V \operatorname{div} \vec{E} \cdot dV, \quad (1.61)$$

где  $V$  - объем, ограниченный замкнутой поверхностью  $S$ . Если при этом величина электрического заряда в объеме  $V$  может быть записана в форме

$$q = \int_V \rho dV, \quad (1.62)$$

то из формулировки (1.52), теоремы (1.61) и формулы (1.62) следует

$$\int_V \left( \operatorname{div} \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dV = 0. \quad (1.63)$$

Поскольку соотношение (1.63) должно выполняться для произвольного объема (не только какого-либо конкретного), то единственной возможностью выполнения условия (1.63) является обращение в нуль подынтегрального выражения, что приводит к соотношению (1.60).

Уравнение (1.60) записано в декартовой системе координат. С помощью теоремы (1.61) можно записать выражение для дивергенции векторного поля  $\vec{E}$  в произвольной системе координат:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} \cdot \vec{n} dS}{V}. \quad (1.64)$$

Выражение (1.64) служит также для установления математического и физического смысла операции дивергенции векторного поля.

Выше было сказано, что эффективность применения теоремы Гаусса для векторного поля  $\vec{E}$  существенно зависит от степени симметрии пространственного заряда. При этом речь шла об интегральной формулировке теоремы (1.52). Аналогичное явление имеет место и при рассмотрении дифференциальной формулировки теоремы Гаусса (1.60): она не является самодостаточной, поскольку соотношением (1.60) связаны между собой три функции -  $E_x$ ,  $E_y$  и  $E_z$ , а уравнение всего одно единственное. Понятно, что только при наложении дополнительных связей между этими функциями можно будет определить каждую из них.

*Задача 1. Постоянное (однородное) поле  $\vec{E}$  направлено вдоль вертикальной оси симметрии полусферы радиуса  $a$ . Непосредственным вычислением показать, что поток вектора  $\vec{E}$  через поверхность полусферы равен  $\pi a^2 E$ .*

*Задача 2. Используя интегральную форму теоремы Гаусса, вычислить напряженность электрического*

поля внутри и вне шара радиуса  $a$ , заряженного постоянной объемной плотностью электрического заряда.

Задача 3. Используя интегральную форму теоремы Гаусса, вычислить напряженность электрического поля в окрестности бесконечно протяженной плоскости, заряженной постоянной поверхностной плотностью электрического заряда.

Задача 4. Используя интегральную форму теоремы Гаусса, вычислить напряженность электрического поля в окрестности бесконечной прямой нити, заряженной постоянной линейной плотностью электрического заряда.

Задача 5. Используя определение понятия  $\operatorname{div} \vec{E}$  для произвольной системы координат (формула (1.64)) получить выражение  $\operatorname{div} \vec{E}$  в координатной форме для

- а) декартовой системы координат,
- б) для цилиндрической системы координат,
- в) для сферической системы координат.

[предыдущая](#) | [наверх](#) | [следующая](#)

© 2002. МГТУ им. Н.Э.Баумана | Designed by krE[Sote]

[об учебнике](#) | [содержание](#) | [поиск](#)

## ГЛАВА 1. Электростатическое поле в вакууме

### 1.5. Уравнение Пуассона для потенциала электростатического поля. Понятие о краевых задачах в теории потенциала и методах их решения

Проблема расчета электростатического поля в общем случае не является безнадежной.

Действительно, если вспомнить выражение векторного поля  $\vec{E}$  через потенциал электростатического поля

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi, \quad (1.65)$$

то есть

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (1.66)$$

и подставить выражение (1.65) в формулу (1.60), то получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.67)$$

Уравнение (1.67) называют уравнением Пуассона, в частном случае  $\rho \equiv 0$  оно превращается в уравнение Лапласа. В операторной форме уравнение Пуассона имеет вид:

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.68)$$

где  $\Delta$  - оператор Лапласа (лапласиан)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.69)$$

в декартовой системе координат. Иногда оператор Лапласа записывают в форме произведения двух операторов Гамильтона (операторов "набла"):

$$\Delta = \nabla \nabla = \nabla^2, \quad \nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1.70)$$

Заметим, что формы записи оператора  $\Delta$  различны в различных системах координат.

Уравнение Пуассона является линейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка. В общем случае уравнение (1.67) может иметь бесчисленное множество решений.

Единственное решение уравнения (1.67) получается, если на границе области, в которой рассматривается это уравнение, заданы граничные условия первого рода (задача Дирихле), второго рода (задача Неймана) или третьего рода. В первом случае на границе области считается известной искомая функция, во втором - ее нормальная производная, в третьем - линейная комбинация функции и ее нормальной производной. Современная математика располагает многими методами решения так называемых краевых задач, как аналитическими, так и численными, а современное математическое обеспечение персональных компьютеров содержит в своем составе "решатели" краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона.

В настоящее время можно говорить о том, что задача расчета произвольного электростатического поля особых, принципиальных трудностей не представляет.

Значимость уравнения Пуассона для проблем электростатики заключается в том, что с его помощью решение может быть найдено практически всегда, а с помощью теоремы Гаусса только в исключительных случаях.

*Задача 1(.* Пространство между двумя параллельными бесконечными плоскостями заполнено постоянной объемной плотностью заряда  $\rho$ . Расстояние между плоскостями равно  $d$ . Потенциал одной плоскости равен 0, второй -  $U$ . Найдите распределение по поперечной координате  $\varphi(x)$  и  $E(x)$ , используя уравнение Пуассона.

[предыдущая](#) | [наверх](#) | [следующая](#)

© 2002. МГТУ им. Н.Э.Баумана | Designed by krE[Sote

[об учебнике](#) | [содержание](#) | [поиск](#)

## ГЛАВА 2. Электростатическое поле в веществе (феноменологическое описание)

### 2.1. Электрический диполь. Поле диполя

Рассмотрим систему двух точечных электрических зарядов  $q$  и  $-q$ , произвольным образом расположенных в пространстве на расстоянии  $l$  друг от друга. Такую систему зарядов назовем

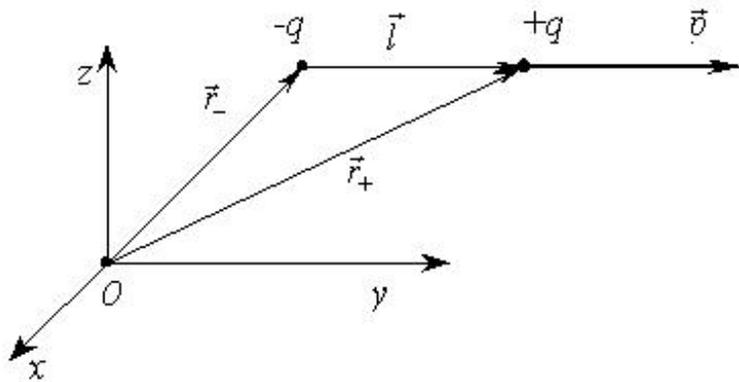


Рис. 2.1.  
Электрический диполь

электрическим диполем. Из точки расположения отрицательного заряда в точку расположения положительного заряда проведем вектор  $\vec{l}$  (Рис. 2.1). Электрическим моментом диполя (дипольным моментом) назовем физическую величину

$$\vec{p} = q\vec{l}. \quad (2.1)$$

Понятие "электрический диполь" широко используется в электродинамике. Изучим свойства описанной системы.

Электрический диполь создает вокруг себя электрическое поле, которое нетрудно рассчитать с использованием принципа суперпозиции. Однако на расстояниях, значительно превышающих размер  $l$

диполя, электростатическое поле обладает некоторыми характерными свойствами, представляющими интерес для дальнейшего изложения предмета.

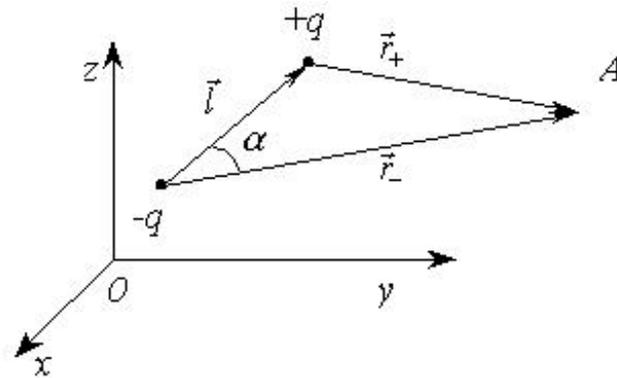


Рис. 2.2.  
Поле электрического диполя

Рассмотрим физическую ситуацию, изображенную на рис. 2.2. Здесь  $A$  - точка наблюдения,  $\vec{r}_+$  и  $\vec{r}_-$  - векторы, проведенные из точек расположения соответствующих зарядов в точку наблюдения, вектор  $\vec{l}$  описан выше.

Рассчитаем значение потенциала электростатического поля в точке наблюдения  $A$  в предположении, что потенциал бесконечно удаленной точки пространства равен нулю и  $|\vec{r}_\pm| \gg |\vec{l}|$ . Ниже под величинами  $r_\pm$  будем понимать модули соответствующих векторов. Точное выражение для потенциала в точке  $A$  имеет вид:

$$\varphi(A) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right). \quad (2.2)$$

Векторы  $\vec{r}_+$  и  $\vec{r}_-$  связаны между собой зависимостью

$$\vec{r}_- = \vec{r}_+ + \vec{l}, \quad (2.3)$$

что позволяет переписать выражение (2.2) в форме:

$$\varphi(A) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{\left[ (\vec{r}_+ + \vec{l})^2 \right]^{1/2}} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{\sqrt{r_+^2 + 2\vec{r}_+ \vec{l} + l^2}} \right). \quad (2.4)$$

В полученном выражении опустим член  $l^2$  как малую величину и опустим индекс "+" у модуля соответствующего вектора:

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r \sqrt{1 + \frac{2\vec{r}\vec{l}}{r^2}}} \right) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r \left( 1 + \frac{\vec{r}\vec{l}}{r^2} \right)} \right) \approx \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \left( 1 - \frac{\vec{r}\vec{l}}{r^2} \right)}{r} = \frac{q\vec{r}\vec{l}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \end{aligned}$$

С учетом обозначения (2.1) получаем:

$$\varphi(A) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{p}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \alpha}{r^2}, \quad (2.5)$$

где  $\alpha$  - угол между вектором  $\vec{p}$  и направлением на точку наблюдения  $A$ . Заметим, что если сравнивать между собой потенциал поля точечного заряда и потенциал поля диполя, легко увидеть, что потенциал поля диполя убывает с расстоянием быстрее, чем потенциал поля точечного заряда.

Напряженность электростатического поля в точке наблюдения  $\vec{E}(A)$  можно было бы вычислить, используя зависимость  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ , но вычисление градиента скалярного произведения требует привлечения довольно громоздкой формулы векторного анализа, поэтому используем прямое вычисление:

$$\vec{E}(A) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{\vec{r}_-}{r_-^3} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{\vec{r}_+ + \vec{l}}{\left[ (\vec{r}_+ + \vec{l})^2 \right]^{3/2}} \right). \quad (2.6)$$

Аналогично предыдущему воспользуемся тем обстоятельством, что  $l/r_+ \ll 1$ :

$$\vec{E}(A) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{r} + \vec{l}}{r^3 \left( 1 + \frac{2\vec{r}\vec{l}}{r^2} \right)^{3/2}} \right) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{(\vec{r} + \vec{l})}{r^3 \left( 1 + \frac{3\vec{r}\vec{l}}{r^2} \right)} \right) \approx$$

$$\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left( \vec{r} - (\vec{r} + \vec{l}) \left( 1 - \frac{3\vec{r}\vec{l}}{r^2} \right) \right).$$

Упрощение последнего выражения с учетом малости  $l^2$  приводит к соотношению:

$$\vec{E}(A) = \frac{3\vec{e}_r \cdot p \cos\alpha - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (2.7)$$

где  $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ ,  $\alpha$  имеет то же значение, что и выше. Если ограничиться направлением,

перпендикулярным направлению дипольного момента ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ), то становится очевидным, что величина напряженности электрического поля диполя в дальней зоне убывает с расстоянием быстрее, чем убывает величина напряженности поля, образованного одиночным точечным зарядом.

[предыдущая](#) | [наверх](#) | [следующая](#)

© 2002. МГТУ им. Н.Э.Баумана | Designed by krE[Sote]

[об учебнике](#) | [содержание](#) | [поиск](#)

## ГЛАВА 2. Электростатическое поле в веществе (феноменологическое описание)

### 2.2. Электрический диполь во внешнем электрическом поле

Рассмотрим, каким воздействиям подвергается электрический диполь с электрическим моментом  $\vec{p}$  во внешнем электростатическом поле  $\vec{E}$ . В этих условиях он испытывает действие силы

$$\vec{F} = (\vec{p} \nabla) \vec{E}, \quad (2.8)$$

момента

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (2.9)$$

и приобретает потенциальную энергию

$$W_n = -\vec{p} \cdot \vec{E}. \quad (2.10)$$

В процессе вывода соотношений (2.8) - (2.10) станет ясен математический и физический смысл приведенных выражений.

Перед началом выкладок напомним некоторые сведения из математического анализа. Для скалярной функции одного переменного справедливо приближенное выражение

$$f(x + \varepsilon) = f(x) + \frac{df}{dx}(x) \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.11)$$

Это соотношение легко обобщается для случая скалярной функции нескольких пространственных переменных:

$$\begin{aligned} f(x + \varepsilon_x, y + \varepsilon_y, z + \varepsilon_z) &= \\ &= f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \cdot \varepsilon_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \cdot \varepsilon_y + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \cdot \varepsilon_z, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\varepsilon_x \rightarrow 0, \quad \varepsilon_y \rightarrow 0, \quad \varepsilon_z \rightarrow 0.$$

Если  $\vec{r}$  - радиус-вектор произвольной точки пространства,  $\vec{\varepsilon}$  - малый произвольный вектор с компонентами  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ , то выше приведенное выражение можно записать в форме:

$$f(\vec{r} + \vec{\varepsilon}) = f(\vec{r}) + \vec{\varepsilon} \cdot \nabla f(\vec{r}) = f(\vec{r}) + (\vec{\varepsilon} \nabla) f(\vec{r}), \quad (2.13)$$

формально

$$(\vec{\epsilon}\nabla) = \epsilon_x \frac{\partial}{\partial x} + \epsilon_y \frac{\partial}{\partial y} + \epsilon_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.14)$$

причем соотношение (2.14) справедливо в декартовой системе координат.

Для векторной величины  $\vec{f}(\vec{r} + \vec{\epsilon})$  соотношение (2.13) можно записать для каждой компоненты отдельно, а в компактной форме записи получить:

$$\vec{f}(\vec{r} + \vec{\epsilon}) = \vec{f}(\vec{r}) + (\vec{\epsilon}\nabla)\vec{f}(\vec{r}) \quad (2.15)$$

Зависимости (2.13) и (2.15) являются обобщением отрезка ряда Тейлора для скалярной функции одного переменного (2.11) на многомерный случай скалярного и векторного полей.

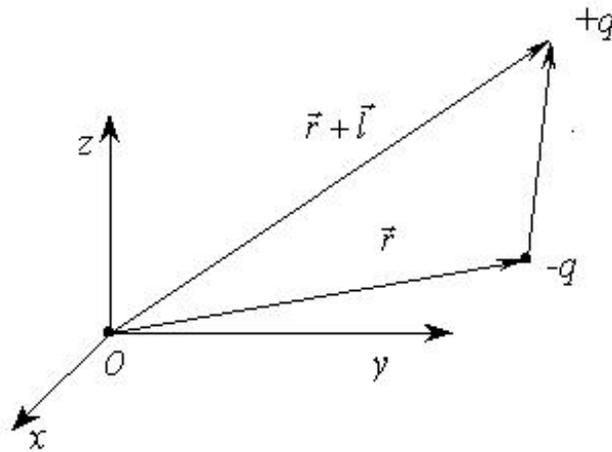


Рис. 2.3.

### Электрический диполь во внешнем электростатическом поле

Рассчитаем силу, действующую на электрический диполь во внешнем электростатическом поле  $\vec{E}(x, y, z)$  (рис. 2.3). На рис. 2.3  $\vec{r}$  - радиус-вектор точки расположения отрицательного заряда диполя, а  $\vec{r} + \vec{l}$  - радиус-вектор точки расположения положительного заряда диполя. Суммарная сила, действующая на рассматриваемую систему электрических зарядов описывается выражением:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}(\vec{r} + \vec{l}) - q \vec{E}(\vec{r}). \quad (2.16)$$

С учетом приведенного выше соотношения (2.15) получим

$$\vec{F} = q(\vec{E}(\vec{r}) + (\vec{l}\nabla)\vec{E}(\vec{r}) - \vec{E}(\vec{r})) = q \cdot (\vec{l}\nabla)\vec{E}(\vec{r}) = (\vec{p}\nabla)\vec{E}.$$

Результат (2.8) получен. Заметим, что зависимость (2.8) в случае однородного электрического поля ( $\vec{E} = \text{const}$ ) обращается в нуль.

Для момента сил, действующих на рассматриваемую систему электрических зарядов, относительно начала координат имеем:

$$\vec{M} = -\vec{r} \times q\vec{E}(\vec{r}) + (\vec{r} + \vec{l}) \times q \cdot \vec{E}(\vec{r} + \vec{l}). \quad (2.17)$$

Если в выражении (2.17) использовать соотношение (2.15) для вычисления  $\vec{E}(\vec{r} + \vec{l})$  и в полученном соотношении пренебречь членом с множителем  $l^2$  из-за его малости, приходим к результату:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} + \vec{r} \times (\vec{p} \nabla) \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E} + \vec{r} \times \vec{F}, \quad (2.18)$$

где

$\vec{F}$  определено соотношением (2.8).

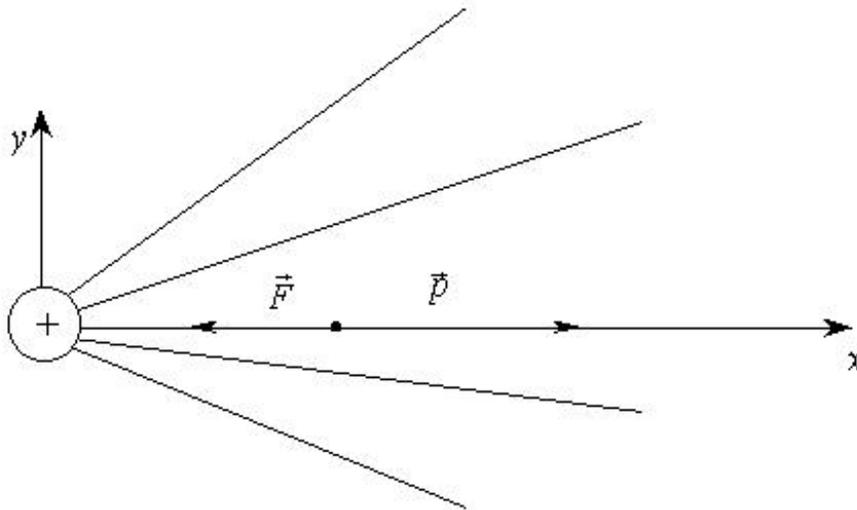


Рис. 2.4.

#### Момент сил, действующий на электрический диполь во внешнем

Если рассчитывать момент сил (2.18) относительно точки расположения отрицательного заряда диполя, то получаем  $\vec{r} = \mathbf{0}$  и приходим к соотношению (2.9). Тот же результат получается и при расчете момента сил (2.18) относительно центра масс системы электрических зарядов.

Рассчитаем величину потенциальной энергии, приобретаемой электрическим диполем во внешнем электрическом поле. Будем исходить из очевидного соотношения:

$$W_n = -q\varphi(\vec{r}) + q\varphi(\vec{r} + \vec{l}). \quad (2.19)$$

С помощью формулы (2.13) преобразуем соотношение (2.19):

$$W_n = -q\varphi(\vec{r}) + q\varphi(\vec{r}) + q(\vec{l}\nabla)\varphi = \vec{p}(\nabla\varphi) = -\vec{p}\vec{E} = -pE \cos \alpha, \quad (2.20)$$

где  $\alpha$  - угол между вектором  $\vec{l}$  и направлением напряженности электростатического поля  $\vec{E}$ . Таким образом, соотношения (2.8) - (2.10) доказаны.

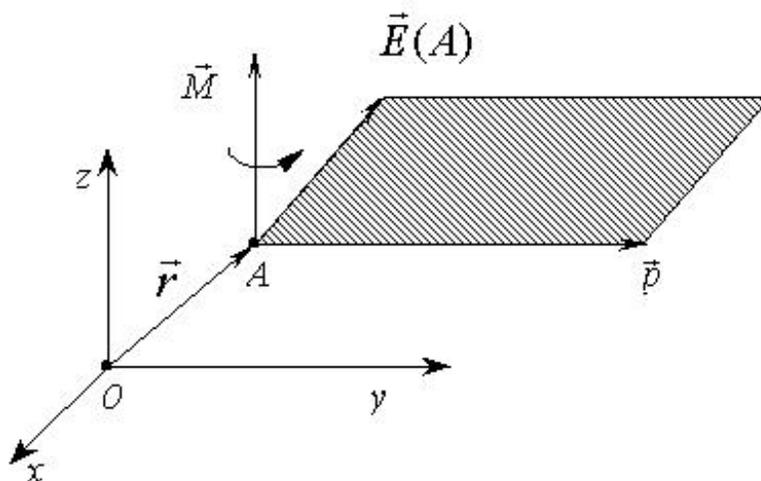


Рис. 2.5.

*Потенциальная энергия электрического диполя в однородном электростатическом поле в зависимости от ориентации диполя*

Обсудим некоторые следствия полученных результатов. Из формулы (2.8), в частности, следует, что только в неоднородном поле  $\vec{E}$  возникает сила, действующая на диполь как на систему зарядов. Из формулы (2.20) следует, что потенциальная энергия системы будет минимальна, если направления векторов  $\vec{p}$  и  $\vec{E}$  совпадают между собой ( $\alpha = 0$ ,

$\cos \alpha = 1$ ). В этом состоянии момент сил (2.9) обращается в ноль.

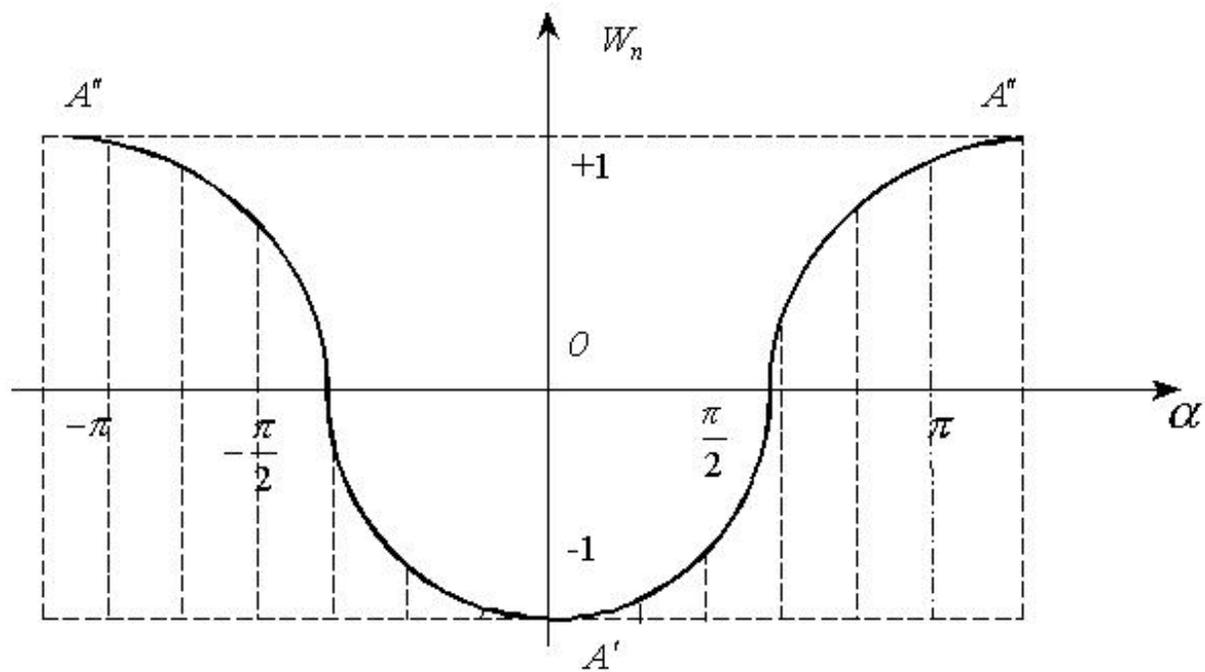


Рис. 2.6.

Сила, действующая на электрический диполь в поле точечного положительного заряда.

$$F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x}$$

В целом электростатическое поле

1. стремится развернуть электрический диполь вдоль силовой линии электрического поля;
2. стремится сдвинуть электрический диполь вдоль силовой линии векторного поля  $\vec{E}$  в сторону больших значений величины  $E$ ;
3. при повороте вектора дипольного момента относительно силовой линии поля  $\vec{E}$  возникает "возвращающий" момент сил, в гармоническом приближении пропорциональный углу поворота.

[предыдущая](#) | [наверх](#) | [следующая](#)

© 2002. МГТУ им. Н.Э.Баумана | Designed by krE[Sote]

[об учебнике](#) | [содержание](#) | [поиск](#)

## ГЛАВА 2. Электростатическое поле в веществе (феноменологическое описание)

### 2.3. Поляризованность среды. Диэлектрики и электреты

Реальные тела, как правило, являются диэлектриками, то есть системами электрических диполей, так или иначе расположенных в пространстве. В пользу этого утверждения говорит тот факт, что многие молекулы вещества обладают электрическим дипольным моментом. Ниже попытаемся описать электрические свойства таких тел.

Прежде всего заметим, что если выполнено условие электрической нейтральности

$$\sum_i q_i = 0, \quad (2.21)$$

где  $q_i$  - точечный электрический заряд,  $i$  - порядковый номер этого заряда в рассматриваемой системе электрических зарядов, то физическая величина

$$\vec{P} = \sum_i q_i \vec{r}_i, \quad (2.22)$$

может служить характерной величиной, описывающей свойства этой системы. Это действительно так, поскольку выражение (2.22) не зависит от выбора начала системы координат. Если

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{a}, \quad \vec{a} = \text{const}, \quad (2.23)$$

то

$$\vec{P} = \sum_i q_i \vec{r}_i = \sum_i q_i (\vec{r}'_i + \vec{a}) = \sum_i q_i \vec{r}'_i + \vec{a} \sum_i q_i = \vec{P}'.$$

Величину  $\vec{P}$  называют электрическим дипольным моментом системы.

Локальной характеристикой диэлектрика служит величина "поляризованности среды":

$$\vec{\mathcal{P}} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum q_i \vec{r}_i}{\Delta V}. \quad (2.24)$$

В соответствии с определением (2.24) поляризованность среды - это электрический дипольный момент единицы объема вещества.

Для упрощения дальнейших рассуждений допустим, что вещество состоит из одинаковых молекул, каждая из которых обладает электрическим дипольным моментом. Модуль дипольного момента одинаков для всех молекул, а направление - у каждого момента свое. Если в единице объема вещества содержится  $n$  молекул, то, очевидно:

$$\vec{p} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{P}_i}{n \Delta V} \cdot n = n \langle \vec{p} \rangle, \quad (2.25)$$

где  $\langle \vec{p} \rangle$  - средний дипольный момент молекулы вещества. Для большинства веществ в отсутствие внешнего электрического поля  $\langle \vec{p} \rangle = \mathbf{0}$ , для "электретов" -  $\langle \vec{p} \rangle \neq \mathbf{0}$ .

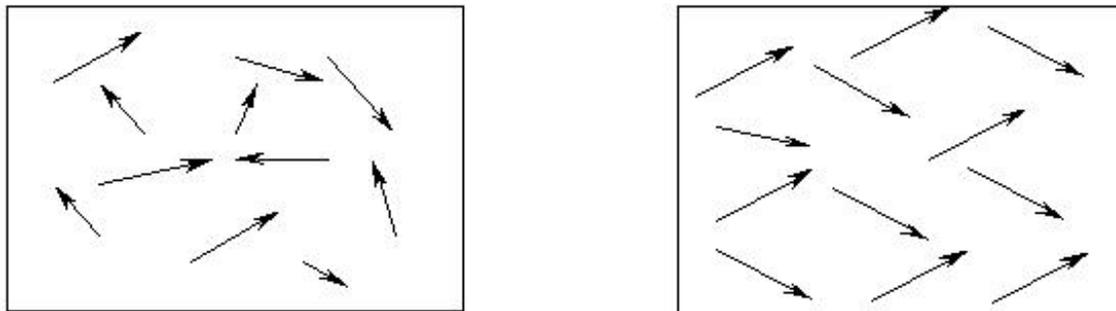


Рис. 2.7.

*Диэлектрики и электреты. а) - электрические диполи диэлектрика в отсутствие внешнего электрического поля б) - электрические диполи электрета в отсутствие внешнего электрического поля*

Во внешнем электрическом поле, как правило,  $\langle \vec{p} \rangle \neq \mathbf{0}$ . При этом имеют место два механизма поляризации вещества. У диэлектриков из неполярных молекул под действием внешнего электрического поля положительные заряды молекулы смещаются "по полю  $\vec{E}$ ", а отрицательные - "против поля  $\vec{E}$ ", и возникает электрический диполь, направленный по силовой линии векторного поля  $\vec{E}$ . У диэлектриков из полярных молекул электрический момент отдельной молекулы стремится развернуться вдоль силовой линии векторного поля  $\vec{E}$ , тем самым нарушается хаотическое распределение дипольных моментов молекул, которое существовало в отсутствие внешнего поля и приводило к отсутствию поляризации среды.

Интересно отметить, что понятие "внешнее поле" в строгом рассмотрении вопроса имеет смысл внешнего поля по отношению к отдельному электрическому диполю, то есть должно учитывать электрическое поле соседних электрических диполей, а не только поле внешних источников. Вычисление внешнего эффективного поля является одной из трудных задач электродинамики.

Поляризация среды приводит к изменению векторного поля напряженности электростатического поля в среде по сравнению с напряженностью электростатического поля в вакууме, созданного одними и теми же источниками поля. Действительно, рассмотрим плоский конденсатор, заполненный однородным диэлектриком из неполярных молекул. Если конденсатор заряжен, внутри конденсатора возникает

"внешнее" однородное поле  $\vec{E}_0$ , обусловленное поверхностной плотностью электрического заряда, расположенного на металлических обкладках, не связанного с молекулярной структурой вещества (свободный заряд). В пространстве между пластинами происходит поляризация молекул вещества, т. е. смещение положительных зарядов в сторону отрицательно заряженной пластины и отрицательных зарядов в сторону положительно заряженной пластины. "Связанные" заряды (т.е. заряды электронов и протонов, входящие в состав молекулы) компенсируют друг друга в объеме вещества, но на границах объема (на поверхности диэлектрика) около пластин конденсатора возникают некомпенсированные связанные заряды с поверхностной плотностью  $\sigma'$ : положительная поверхностная плотность у "отрицательной" стенки и отрицательная поверхностная плотность у "положительной" стенки (рис. 2.8).

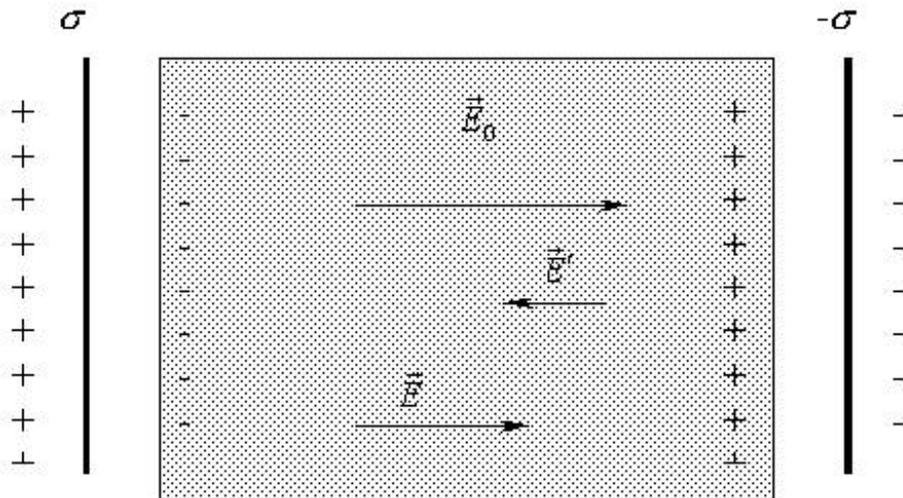


Рис. 2.8.

### Ослабление внешнего электрического поля в диэлектрике

Образовавшуюся систему зарядов можно рассматривать как "конденсатор в конденсаторе", причем "внутренний" конденсатор имеет обратную полярность по отношению к внешнему. Можно говорить, что поляризация вещества ослабляет внешнее электростатическое поле.

Поляризованность среды, как правило, возникает при действии электрического поля на вещество. Естественно предположить функциональную зависимость

$$\vec{p} = \vec{\epsilon}(\vec{E}) \quad (2.26)$$

между поляризованностью (вектор поляризации) и напряженностью электростатического поля  $\vec{E}$ . В рамках классической электростатики, феноменологической по существу, зависимость (2.26) считается известной из опыта или из более подробной теории, в частности, из молекулярно-кинетических представлений, с которыми мы еще познакомимся в настоящем курсе. Оказывается, что во многих практически интересных случаях зависимость (2.26) является линейной и однородной:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \mathcal{K} \vec{E}, \quad (2.27)$$

где  $\mathcal{K}$  - диэлектрическая восприимчивость среды, положительная скалярная величина для изотропной среды или тензор второго ранга для анизотропной среды. Изучение анизотропных сред выходит за рамки настоящего курса. Диэлектрическая восприимчивость среды  $\mathcal{K}$  может быть постоянной величиной (однородная среда) или зависеть от пространственных координат (неоднородная среда).

В сильных электрических полях зависимость (2.26) может оказаться нелинейной.

[предыдущая](#) | [наверх](#) | [следующая](#)

© 2002. МГТУ им. Н.Э.Баумана | Designed by krE[Sote]

[об учебнике](#) | [содержание](#) | [поиск](#)

## ГЛАВА 2. Электростатическое поле в веществе (феноменологическое описание)

### 2.4. Теорема Гаусса для вектора поляризованности среды в интегральной и дифференциальной формах

Поляризованность среды  $\vec{\rho}$  обладает примечательным свойством: поток вектора поляризованности среды через произвольную замкнутую поверхность численно равен величине некомпенсированных "связанных" зарядов внутри этой поверхности, взятой с обратным знаком:

$$\oint_S \vec{\rho} \cdot \vec{n} dS = -Q'. \quad (2.28)$$

В локальной формулировке описываемое свойство описывается соотношением

$$\operatorname{div} \vec{\rho} = -\rho', \quad (2.29)$$

где  $\rho'$  - объемная плотность "связанных" зарядов. Соотношения (2.28) и (2.29) называют теоремой Гаусса для поляризованности среды (вектора поляризации) в интегральной и дифференциальной формах соответственно. Если теорема Гаусса для напряженности  $\vec{E}$  электрического поля является следствием закона Кулона в "полевой" форме, то теорема Гаусса для поляризованности  $\vec{\rho}$  является следствием определения этой величины (2.24) - (2.25).

Докажем соотношение (2.28), тогда соотношение (2.29) окажется справедливым в силу математической теоремы Остроградского-Гаусса.

Рассмотрим диэлектрик из неполярных молекул с объемной концентрацией последних, равной  $n$ . Считаем, что под действием электрического поля положительные заряды сместились из положения равновесия на величину  $\vec{a}_+$ , а отрицательные - на величину  $\vec{a}_-$ . Каждая молекула приобрела электрический момент  $q\vec{l} = q(\vec{a}_+ - \vec{a}_-)$ , а единичный объем приобрел электрический момент  $nq\vec{l}$ .

Рассмотрим произвольную достаточно гладкую замкнутую поверхность  $S$  в описываемом диэлектрике. Допустим, что поверхность  $S$  проведена так, что в отсутствие электрического поля  $\vec{E}$  она "не пересекает" отдельные диполи, то есть положительный и отрицательный заряды, связанные с молекулярной структурой вещества, "компенсируют" друг друга.

Заметим, кстати, что соотношения (2.28) и (2.29) при  $\vec{\rho} = \mathbf{0}$  и  $Q' = 0, \rho' = 0$  удовлетворяются тождественно.

Под действием электрического поля элемент площади поверхности  $dS$  пересекут положительные заряды из объема  $\vec{a}_+ \cdot \vec{n} dS$  в количестве  $qn \cdot \vec{a}_+ \cdot \vec{n} dS$ . Для отрицательных зарядов имеем соответственно величины  $n \cdot \vec{a}_- \cdot \vec{n} dS$  и  $-qn \cdot \vec{a}_- \cdot \vec{n} dS$ . Суммарный заряд, перешедший на "внешнюю" сторону элемента площади поверхности  $dS$  (напомним, что  $\vec{n}$  - внешняя нормаль к  $dS$  по отношению к охватываемому поверхностью  $S$  объему) равен

$$dQ' = qn(\vec{a}_+ - \vec{a}_-) \cdot \vec{n} dS = qn \cdot \vec{l} \cdot \vec{n} \cdot dS = \vec{\rho} \cdot \vec{n} \cdot dS.$$

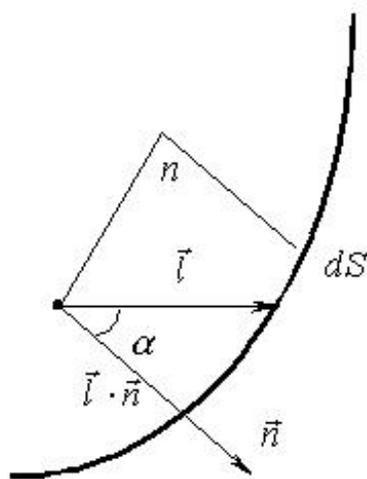


Рис. 2.9.

**Свойства вектора поляризованности среды**

Проинтегрировав полученное выражение по замкнутой поверхности  $S$ , получим величину суммарного электрического заряда, покинувшего рассматриваемый объем. Последнее позволяет заключить, что в рассматриваемом объеме остался некомпенсированный заряд  $-Q'$ , равный по модулю ушедшему заряду. В итоге имеем:

$$\oint_S \vec{\Phi} \cdot \vec{n} dS = -Q',$$

таким образом теорема Гаусса для векторного поля  $\vec{\Phi}$  в интегральной формулировке доказана.

Чтобы рассмотреть случай вещества, состоящего из полярных молекул, достаточно в приведенных выше рассуждениях величину  $\vec{P}$  заменить на ее среднее значение  $\langle \vec{P} \rangle$ .

Доказательство справедливости соотношения (2.28) можно считать законченным.

предыдущая | вверх | следующая

© 2002. МГТУ им. Н.Э.Баумана | Designed by krE[S]ote

об учебнике | содержание | поиск

## ГЛАВА 2. Электростатическое поле в веществе (феноменологическое описание)

### 2.5. Вектор D. Теорема Гаусса для вектора D в интегральной и дифференциальной формах

В диэлектрической среде могут присутствовать электрические заряды двух типов: "свободные" и "связанные". Первые из них не связаны с молекулярной структурой вещества и, как правило, могут относительно свободно перемещаться в пространстве. Вторые связаны с молекулярной структурой вещества и под действием электрического поля могут смещаться из положения равновесия, как правило, на очень малые расстояния.

Использование напрямую теоремы Гаусса для векторного поля  $\vec{E}$  при описании диэлектрической среды неудобно тем, что правая часть формулы

$$\oint_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n} dS = Q + Q' \quad (2.30)$$

содержит как величину "свободного", так и величину "связанного" (некомпенсированного) зарядов внутри замкнутой поверхности  $S$ .

Если соотношение (2.30) почленно сложить с соотношением (2.28), получим

$$\oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{p}) \cdot \vec{n} dS = Q, \quad (2.31)$$

где  $Q$  - суммарный "свободный" заряд объема, охватываемого замкнутой поверхностью  $S$ . Соотношение (2.31) обуславливает целесообразность введения специального вектора

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{p} \quad (2.32)$$

в качестве удобной расчетной величины, характеризующей электрическое поле в диэлектрической среде. Вектор  $\vec{D}$  раньше называли вектором электрической индукции или вектором электрического смещения. В настоящее время входит в употребление термин "вектор  $\vec{D}$ ".

Для векторного поля  $\vec{D}$  справедлива интегральная форма теоремы Гаусса:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = Q \quad (2.33)$$

и, соответственно, дифференциальная форма теоремы Гаусса:

$$\text{div } \vec{D} = \rho, \quad (2.34)$$

где  $\rho$  - объемная плотность свободных зарядов.

Если справедливо соотношение (2.27) (для жестких электретов оно не справедливо), то для

вектора  $\vec{D}$  из определения (2.32) следует

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \mathcal{K} \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \mathcal{K}) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}, \quad (2.35)$$

где  $\epsilon = 1 + \mathcal{K}$  - диэлектрическая проницаемость среды, одна из важнейших электрических характеристик вещества. В электростатике и квазистационарной электродинамике величина  $\epsilon$  является действительной. При рассмотрении высокочастотных колебательных процессов фаза колебания вектора  $\vec{\phi}$ , а значит и вектора  $\vec{D}$ , может не совпадать с фазой колебаний вектора  $\vec{E}$ , в таких случаях величина  $\epsilon$  становится комплекснозначной величиной.

Рассмотрим вопрос, при каких условиях в диэлектрической среде возможно появление некомпенсированной объемной плотности связанных зарядов. Для этой цели запишем выражение вектора поляризации  $\vec{\phi}$  через диэлектрическую проницаемость среды  $\epsilon$  и вектор  $\vec{D}$ :

$$\vec{\phi} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \vec{D}, \quad (2.36)$$

в справедливости которого легко убедиться. Теперь представляющая интерес величина  $\rho'$  может быть вычислена:

$$\begin{aligned} \rho' &= -\operatorname{div} \vec{\phi} = -\operatorname{div} \left( \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \vec{D} \right) = - \left( \vec{D} \operatorname{grad} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} + \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \operatorname{div} \vec{D} \right) = \\ &= -\epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\operatorname{grad} \epsilon}{\epsilon} - \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \rho. \end{aligned} \quad (2.37)$$

В отсутствие в диэлектрической среде объемной плотности свободных зарядов ( $\rho = 0$ ) величина  $\rho'$  может обратиться в нуль, если

а) отсутствует поле  $\vec{E}$ ;

или б) среда однородна ( $\operatorname{grad} \epsilon = 0$ )

или в) векторы  $\vec{E}$  и  $\operatorname{grad} \epsilon$  - ортогональны.

В общем случае необходимо вычислить величину  $\rho'$  по соотношениям (2.37).

[предыдущая](#) | [наверх](#) | [следующая](#)

© 2002. МГТУ им. Н.Э.Баумана | Designed by krE[ ]Sote

[об учебнике](#) | [содержание](#) | [поиск](#)

## ГЛАВА 2. Электростатическое поле в веществе (феноменологическое описание)

### 2.6. Соотношения на границе раздела двух диэлектриков для электрических величин

Рассмотрение свойств электростатического поля в неоднородной диэлектрической среде было бы неполным без анализа зависимостей между компонентами соответствующих векторных полей по разные стороны от границы раздела свойств диэлектрика.

Рассмотрим сначала зависимость между нормальными к поверхности раздела компонентами векторного поля  $\vec{D}$ . Пусть в окрестности произвольной точки поверхности  $S$  раздела двух сред выделена малая площадка  $S_0$  и выбрано положительное направление нормали  $\vec{n}$ . Среда, расположенная в "положительном" пространстве относительно поверхности  $S$ , описывается величинами с индексом 2, а среда в "отрицательном" пространстве относительно поверхности  $S$ , описывается величинами с индексом 1. Из каждой точки контура, ограничивающего площадку  $S_0$ , восстановим перпендикуляр к поверхности  $S$  и отложим в среде 2 и среде 1 на этом перпендикуляре отрезок  $h$ . Поверхность площадок  $S_2$  и  $S_1$  вместе с боковой поверхностью  $S_{\text{бок}}$  (рис. 2.10) образуют замкнутую поверхность, охватывающую объем с различающимися локальными характеристиками. К рассматриваемому объему применима теорема Гаусса для векторного поля  $\vec{D}$  в интегральной форме:

$$\iint_{S_1} \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 dS_1 + \iint_{S_2} \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2 dS_2 + \iint_{S_{\text{бок}}} \vec{D} \cdot \vec{v} dS_{\text{бок}} = Q, \quad (2.38)$$

где  $\vec{v}$  - вектор внешней нормали к элементу площади боковой поверхности,  $Q$  - суммарная величина свободных зарядов внутри рассматриваемого объема:

$$Q = \int_{V_1} \rho_1 dV_1 + \int_{V_2} \rho_2 dV_2 + \int_{S_0} \sigma dS_0. \quad (2.39)$$

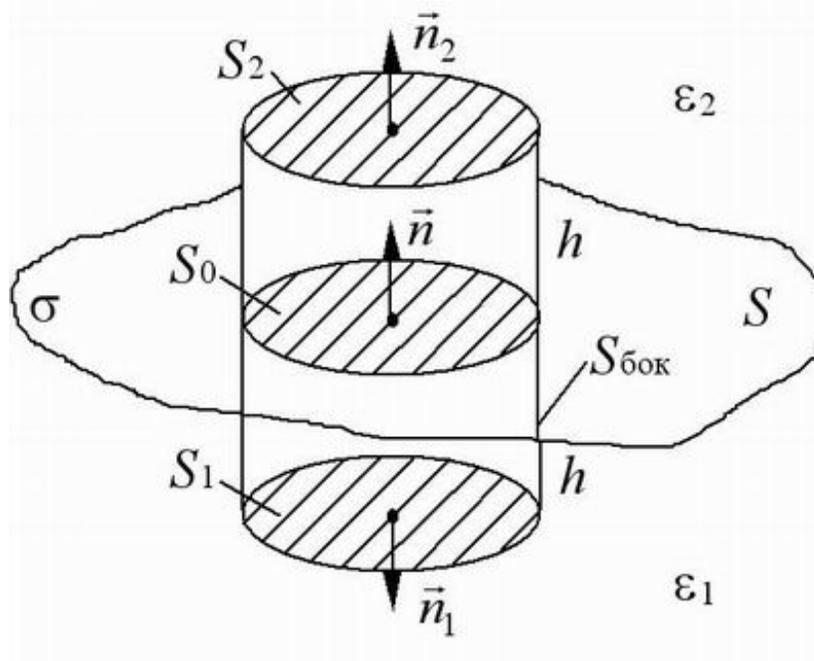


Рис. 2.10.

При записи выражения (2.39) учтено, что в среде 1 и среде 2 может существовать объемная плотность свободных электрических зарядов, а сама поверхность  $S$  может дополнительно содержать свободные заряды с поверхностной плотностью  $\sigma$ .

В математическом анализе известна оценка максимальной величины интеграла  $\mathfrak{I} = \int_a^b f(x) dx$ :

$$\max|\mathfrak{I}| \leq |f(x)|_{\max} \cdot (b - a).$$

С учетом этой оценки можно получить неравенства

$$\left| \int_{S_{\text{бок}}} \vec{D} \cdot \vec{\nu} dS \right|_{\max} \leq \text{const} \cdot 2 \cdot h, \quad \left| \int_{V_1} \rho_1 dV_1 \right|_{\max} \leq \text{const} \cdot h,$$

$$\left| \int_{V_2} \rho_2 dV_2 \right| \leq \text{const} \cdot h.$$

При  $h \rightarrow 0$  эти интегралы стремятся к нулю, площадка  $S_1 \rightarrow S_0$ , площадка  $S_2 \rightarrow S_0$ , и в итоге получается условие:

$$\int_{S_0} \vec{D}_1 \vec{n}_1 dS_0 + \int_{S_0} \vec{D}_2 \vec{n}_2 dS_0 = \int_{S_0} \sigma dS_0. \quad (2.40)$$

Замечая, что  $\vec{n}_2 = \vec{n}$ ,  $\vec{n}_1 = -\vec{n}$ , приходим к соотношению:

$$\int_{S_0} (\vec{D}_2 \vec{n} - \vec{D}_1 \vec{n} - \sigma) dS_0 = 0. \quad (2.41)$$

Поскольку соотношение (2.41) должно выполняться для произвольной площадки  $S_0$ , то из интегрального условия (2.41) следует локальное:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma. \quad (2.42)$$

Сформулируем полученный результат: нормальные компоненты векторного поля  $\vec{D}$  на границе раздела двух сред испытывают скачок, равный поверхностной плотности свободных зарядов.

Соотношение (2.42) теряет силу для точек поверхности  $S$ , в которых расположены точечные заряды, и для линий, лежащих на поверхности  $S$  и заряженных погонной плотностью свободных зарядов.

Заметим, что теоремы Гаусса для векторных полей  $\vec{\Phi}$  и  $\vec{E}$  по форме не отличаются от теоремы Гаусса для поля  $\vec{D}$ , поэтому, в частности, справедливо условие

$$\Phi_{2n} - \Phi_{1n} = -\sigma', \quad (2.43)$$

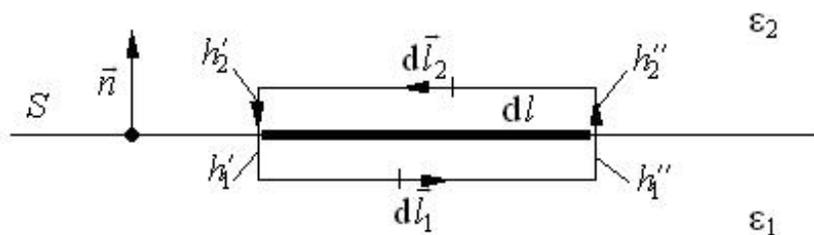
$\sigma'$  - поверхностная плотность связанных зарядов, расположенных на поверхности  $S$  раздела двух сред. Поскольку чаще всего эта величина неизвестна, то соотношение (2.43) используют для ее расчета.

Векторное поле напряженности  $\vec{E}$  электростатического поля и в диэлектрической среде остается потенциальным:

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (2.44)$$

Действительно, единственным ограничением при выводе условия (2.44) было требование неподвижности электрических зарядов, формирующих это поле. В условиях электростатики и свободные, и связанные заряды неподвижны, следовательно, условие (2.44) имеет место.

Получим локальное условие для компонент вектора напряженности  $\vec{E}$  электростатического поля на границе раздела двух диэлектриков. В окрестности произвольной точки поверхности  $S$  раздела двух сред после выбора положительного направления нормали рассмотрим замкнутый контур, показанный на рис. 2.11.



## Рис. 2.11.

В силу условия (2.44) получаем

$$\int_{l_1} \vec{E}_1 d\vec{l}_1 + \int_{l_2} \vec{E}_2 d\vec{l}_2 + \int_{h_1'} \vec{E}_1 d\vec{h}_1' + \int_{h_1''} \vec{E}_1 d\vec{h}_1'' + \int_{h_2'} \vec{E}_2 d\vec{h}_2' + \int_{h_2''} \vec{E}_2 d\vec{h}_2'' = 0$$

В этом соотношении 4 последних интеграла в левой части пропорциональны величине  $h$  и при  $h \rightarrow 0$  их величины также стремятся к нулю.

В итоге, когда отрезок контура  $l_2$  "ложится" на отрезок  $l \in S$ , отрезок контура  $l_1$  "ложится" на отрезок  $l \in S$ , их направления противоположны, получаем интегральное условие

$$\int_l (E_{2t} - E_{1t}) dl = 0, \quad (2.45)$$

откуда в силу произвольности отрезка контура  $l$  получаем условие:

$$E_{2t} - E_{1t} = 0. \quad (2.46)$$

Сформулируем полученный результат: тангенциальные (касательные) компоненты векторного поля  $\vec{E}$  непрерывны при переходе через границу раздела двух сред.

Заметим, что касательные компоненты векторного поля  $\vec{E}$  однозначно формируют касательные компоненты векторных полей  $\vec{\Phi}$  и  $\vec{D}$ , если среды изотропны. Поэтому условия (2.46) достаточно для получения соотношений связи касательных компонент векторных полей  $\vec{\Phi}$  и  $\vec{D}$  на границе раздела двух сред.

В заключение раздела отметим, что интегральная форма теоремы Гаусса, дифференциальная форма теоремы Гаусса и соотношения на поверхности раздела сред органически связаны друг с другом и одно немыслимо без другого.

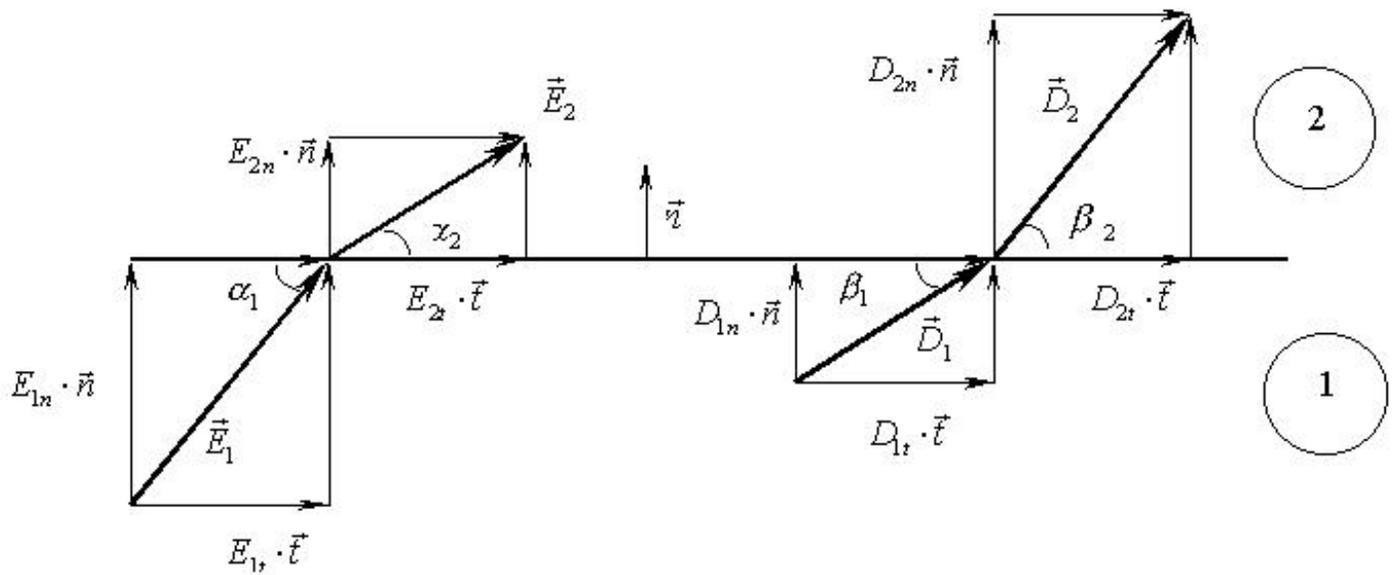


Рис. 2.12.

Излом силовых линий векторных полей  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  на границе раздела двух сред

[предыдущая](#) | [наверх](#) | [следующая](#)

© 2002. МГТУ им. Н.Э.Баумана | Designed by krE[Sote]

[об учебнике](#) | [содержание](#) | [поиск](#)

## ГЛАВА 3. Стационарное магнитное поле в вакууме

### 3.1. Опыты Эрстеда. Опыты Ампера. Опыты Кулона. Закон Био-Савара-Лапласа

При рассмотрении свойств магнитостатического поля будем исходить из соотношения для элементарной силы взаимодействия двух отрезков контуров  $d\vec{l}_1$  и  $d\vec{l}_2$ , по которым текут токи  $\mathcal{I}_1$  и  $\mathcal{I}_2$  соответственно и которые находятся на расстоянии  $r_{12}$  друг от друга

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12})}{|\vec{r}_{12}|^3}. \quad (3.1)$$

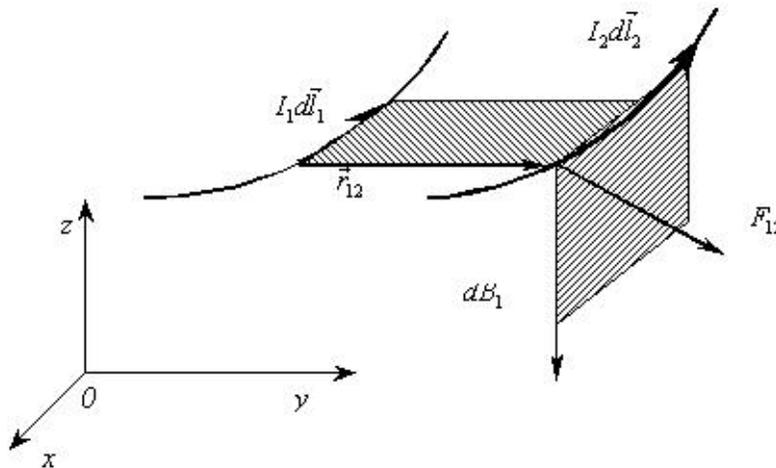


Рис. 3.1.

#### Взаимодействие малых отрезков с токами по закону Ампера

Соотношение (3.1) называют "законом Ампера". В этом соотношении  $\vec{r}_{12}$  проводится из точки расположения элемента  $d\vec{l}_1$  в точку расположения элемента  $d\vec{l}_2$ .

Закон Ампера (3.1) является основой физики магнитных явлений подобно тому, как закон Кулона является основой физики электрических явлений.

Исследование свойств магнитного поля является более трудной задачей, чем исследование свойств электрического поля. Если закон Кулона описывает так называемые центральные силы, то закон Ампера описывает силы, не обладающие этим свойством. Если электрическое поле (электростатика) является потенциальным, то

магнитное поле совсем не обязано быть таковым. Общее, что имеет место в законе Кулона и законе Ампера - это зависимость "обратных квадратов". Закон Ампера в форме (3.1) представляет собой пример сил, не подчиняющихся напрямую третьему закону Ньютона: сила действия здесь не равна силе противодействия.

Справедливости ради заметим, что сам Ампер получил совсем другое аналитическое выражение для силы  $d\vec{F}_{12}$ . Его заслугой является экспериментальное доказательство взаимодействия проводника с током с полем постоянного магнита и взаимодействия между собой двух проводников с током. Незадолго до него Эрстед обнаружил влияние тока, текущего в проводнике, на магнитную стрелку. В результате опытов Эрстеда и Ампера электрические и магнитные явления оказались связанными между собой.

Задолго до опытов Ампера Кулон проводил эксперименты по взаимодействию между собой постоянных магнитов. Из этих опытов следовало, что, если полюсам магнита приписать значения "магнитных зарядов" разных знаков, то закон обратных квадратов при описании силы их взаимодействия будет выполняться. Кулон отмечал невозможность получить магнит с зарядом одного знака.

Успехи механики (закон всемирного тяготения) и электростатики (закон Кулона), опыты Кулона с постоянными магнитами - все это способствовало проявлению инерции мышления, поэтому Ампер полагал, что сила взаимодействия двух элементов тока должна быть центральной (как сила Кулона).

Это предположение Ампера, как и предположение Кулона о существовании магнитных зарядов, оказалось несостоятельным.

Структура закона Ампера (3.1) позволяет ввести в рассмотрение дифференциал индукции магнитного поля

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{I} d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (3.2)$$

где  $\mu_0$  - магнитная постоянная,  $\mathcal{I}$  - ток, создающий вокруг себя магнитное поле,  $\vec{r}$  - вектор, проведенный из элемента контура с током  $\mathcal{I} d\vec{l}$  в точку наблюдения.

Соотношение (3.2) называют законом Био-Савара-Лапласа.

Для индукции магнитного поля  $\vec{B}$  справедлив принцип суперпозиции, поэтому

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathcal{I} d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (3.3)$$

где  $l$  - контур, по элементам которого течет ток  $\mathcal{I}$  (по направлению вектора  $d\vec{l}$  ток  $\mathcal{I}$  считается положительным).

Если проводящее тело нельзя считать тонким проводником, то, используя соотношение

$$\mathcal{I} d\vec{l} = \vec{j} dV, \quad (3.4)$$

где  $\vec{j}$  - объемная плотность тока,  $dV$  - элемент объема тела, получим:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^3} dV, \quad (3.5)$$

где  $V$  - объем тела, в котором текут токи.

Соотношение (3.1) с учетом определения (3.2) можно переписать в форме:

$$d\vec{F} = \mathcal{I} d\vec{l} \times d\vec{B}, \quad (3.6)$$

где элемент тока  $\mathcal{I} d\vec{l}$  находится в векторном поле магнитной индукции  $d\vec{B}$ , в поле, внешнем по отношению к рассматриваемому элементу. Соотношение (3.6) легко обобщается на случай суммарного воздействия на элемент с током  $\mathcal{I} d\vec{l}$  "всех внешних элементов тока" (3.3):

$$d\vec{F} = \mathcal{I} d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (3.7)$$

Результирующая сила, действующая на контур с током (замкнутый или незамкнутый) во внешнем магнитном поле с магнитной индукцией  $\vec{B}$  определяется по принципу суперпозиции:

$$\vec{F} = \int \mathcal{I} d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (3.8)$$

Частным случаем выражения (3.8) для однородного поля  $\vec{B}$  и прямого отрезка проводника является известное из элементарного курса выражение для модуля силы Ампера:

$$F = \mathcal{I} \cdot l \cdot B \cdot \sin \alpha, \quad (3.9)$$

где  $\alpha$  - угол между положительным направлением отрезка, по которому течет ток  $\mathcal{I}$ , и вектором магнитной индукции  $\vec{B}$ .

Заметим, что соотношение (3.7) является следствием зависимости, описывающей силу Лоренца

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (3.10)$$

эта зависимость упоминалась в начале курса. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Если рассматривается система, которая состоит из конечного числа положительных и отрицательных электрических зарядов, то результирующая сила, действующая на систему, может быть записана в виде:

$$\vec{F}_A = \left( \sum q_i^+ + \sum q_i^- \right) \vec{E} + \left( \sum q_i^+ \vec{v}_i^+ + \sum q_i^- \vec{v}_i^- \right) \times \vec{B}. \quad (3.11)$$

Выражение (3.11) справедливо, если размеры электрической системы малы настолько, чтобы можно было считать величины  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  однородными.

В проводнике любого типа при протекании электрического тока с большой точностью выполняется условие электрической нейтральности. Физически это означает, что выполнено условие

$$\sum q_i^+ + \sum q_i^- = 0. \quad (3.12)$$

Последнее служит объяснением, почему в зависимости (3.7) не учитывают неподвижные электрические заряды и напряженность электрического поля  $\vec{E}$ , даже в том случае, когда поле  $\vec{E}$  существует. Перепишем формулу (3.11) с учетом условия (3.12):

$$\vec{F}_R = \left( N_+ e_+ \frac{\sum \vec{v}_i^+}{N_+} + N_- e_- \frac{\sum \vec{v}_i^-}{N_-} \right) \times \vec{B} = (N_+ e_+ \langle \vec{v}_+ \rangle + N_- e_- \langle \vec{v}_- \rangle) \times \vec{B} \quad (3.13)$$

При записи (3.13) учтено дополнительное предположение, введенное для упрощения выкладок, что все положительные заряды системы равны между собой, все отрицательные заряды системы тоже равны между собой. Важным шагом при построении соотношения (3.13) явилось введение средней скорости движения положительных  $\langle \vec{v}_+ \rangle$  и отрицательных  $\langle \vec{v}_- \rangle$  электрических зарядов.

Если в качестве системы зарядов рассматривать заряды в металлическом проводнике, то следует положить

$$\langle \vec{v}_+ \rangle = 0, \quad (3.14)$$

после чего из формул (3.13) получаем:

$$\vec{F}_R = N_- e_- \langle \vec{v}_- \rangle \times \vec{B}, \quad (3.15)$$

где  $N_-$  число,  $e_-$  - электрический заряд движущихся отрицательных частиц (электронов проводимости).

Для числа  $dN = n \cdot S d\vec{l} = n dV$  таких частиц, где  $n$  - объемная концентрация электронов проводимости,

$S$  - площадь поперечного сечения тонкого проводника,  $d\vec{l}$  - элемент длины проводника, а  $dV$  - элемент объема, легко получить:

$$\vec{j} = e_n \cdot \langle \vec{v}_- \rangle, \quad (3.16)$$

$$\mathfrak{I} = j \cdot S, \quad (3.17)$$

$$\langle \vec{v}_- \rangle \uparrow \downarrow d\vec{l}. \quad (3.18)$$

С использованием выражений (3.16)- (3.18) получаем:

$$d\vec{F} = \mathfrak{I} d\vec{l} \times \vec{B} = \vec{j} \times \vec{B} \times dV, \quad (3.19)$$

что совпадает с выражением (3.7).

При использовании закона Био-Савара-Лапласа (3.2) и следствий из него (3.3) или (3.5) удобно перейти к описанию положения элемента тока и точки наблюдения с помощью понятия "радиус-вектор". Если  $\vec{r}'$  - радиус-вектор элемента тока  $\mathfrak{I} d\vec{l}$  (или  $\vec{j} dV$ ), а  $\vec{r}$  - радиус-вектор точки наблюдения, то

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathfrak{I} d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\left[ (\vec{r} - \vec{r}')^2 \right]^{3/2}}, \quad (3.20)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathfrak{I} d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\left[ (\vec{r} - \vec{r}')^2 \right]^{3/2}}, \quad (3.21)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\left[ (\vec{r} - \vec{r}')^2 \right]^{3/2}} dV \quad (3.22)$$

где

$d\vec{l} = \vec{e}_x dx' + \vec{e}_y dy' + \vec{e}_z dz'$ ,  $dV = dx' dy' dz'$ ,  $\vec{r} - \vec{r}' = \vec{e}_x(x - x') + \vec{e}_y(y - y') + \vec{e}_z(z - z')$ ,  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$ ,  $\vec{e}_z$  и  $\vec{e}_z$  - орты декартовой системы координат.

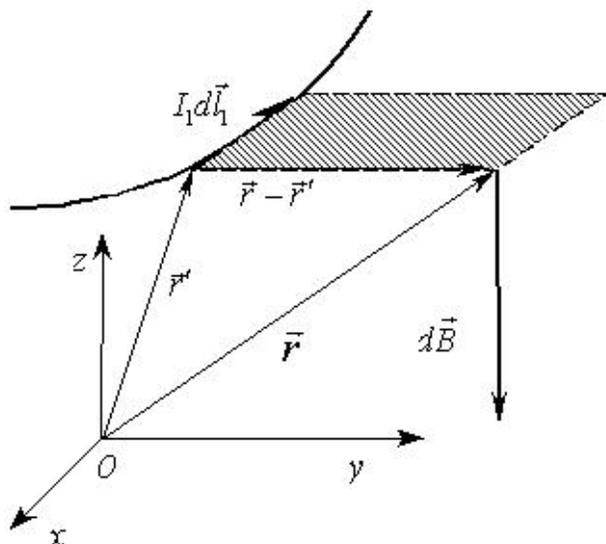


Рис. 3.2.

Магнитное поле элемента контура с током по закону Био-Савара-Лапласа.

Если уравнение контура  $l$  задано в параметрической форме

$$\vec{r}' = \vec{r}'(t) \quad (3.23)$$

т. е.  $x' = x'(t)$ ,  $y' = y'(t)$ ,  $z' = z'(t)$ , то

$$d\vec{l} = \left( \vec{e}_x \frac{dx'}{dt} + \vec{e}_y \frac{dy'}{dt} + \vec{e}_z \frac{dz'}{dt} \right) dt, \quad (3.24)$$

$$dl = \sqrt{\left( \frac{dx'}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy'}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz'}{dt} \right)^2} \cdot dt, \quad (3.25)$$

что существенно облегчает вычисления.

Вернемся к рассмотрению выражения (3.20). Легко видеть, что имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} dB_x &= \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{dy' \cdot (z - z') - dz' \cdot (y - y')}{\left[ (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{3/2}}, \\ dB_y &= \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{dz' \cdot (x - x') - dx' \cdot (z - z')}{\left[ (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{3/2}}, \\ dB_z &= \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{dx' \cdot (y - y') - dy' \cdot (x - x')}{\left[ (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Вычисляя непосредственно выражения  $\frac{\partial(dB_x)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial(dB_y)}{\partial y}$  и  $\frac{\partial(dB_z)}{\partial z}$ , получаем значение

$$\operatorname{div}(d\vec{B}) = -\frac{3\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{5/2}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ (x-x') \cdot [dy'(z-z') - dz'(y-y')] + (y-y') \cdot [dz'(x-x') - dx'(z-z')] + \right.$$

$$\left. + (z-z') \cdot [dx'(y-y') - dy'(x-x')] \right\} \equiv 0.$$

[предыдущая](#) | [наверх](#) | [следующая](#)

© 2002. МГТУ им. Н.Э.Баумана | Designed by krE[]Sote

[об учебнике](#) | [содержание](#) | [поиск](#)

## ГЛАВА 3. Стационарное магнитное поле в вакууме

### 3.2. Дифференциальная и интегральная формы теоремы Гаусса для вектора индукции магнитного поля

Итак, мы получили, что из закона Ампера (и закона Био-Савара-Лапласа) следует уравнение

$$\operatorname{div}(\mathbf{d}\vec{B}) = 0. \quad (3.27)$$

В силу принципа суперпозиции для индукции магнитного поля из (3.27) получаем фундаментальное соотношение для магнитного поля

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (3.28)$$

Таким образом, теорема Гаусса для векторного поля магнитной индукции в дифференциальной форме - соотношение (3.28) - является непосредственным следствием закона Био-Савара-Лапласа. Ее интегральный аналог имеет вид:

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = 0, \quad (3.29)$$

что доказывает в силу произвольности замкнутой поверхности  $S$ , что в природе отсутствуют магнитные заряды. Последнее заключение вытекает из сравнения выражения (3.29) с теоремой Гаусса для вектора  $\vec{D}$  в электростатике:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} \, dS = Q, \quad (3.30)$$

где  $Q$  - свободный электрический заряд внутри замкнутой поверхности  $S$ .

Если ввести в рассмотрение элемент потока векторного поля  $\vec{B}$  через элемент поверхности  $dS$  с нормалью  $\vec{n}$ :

$$d\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (3.31)$$

и определить величину потока вектора магнитной индукции через поверхность  $S$  выражением

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS, \quad (3.32)$$

то теорема Гаусса для поля  $\vec{B}$  в интегральной форме сводится к утверждению:

$$\Phi = 0, \quad \forall S, \quad \text{если } S \text{ замкнута.}$$

(3.33)

[предыдущая](#) | [наверх](#) | [следующая](#)

© 2002. МГТУ им. Н.Э.Баумана | Designed by krE[Sote]



[об учебнике](#) | [содержание](#) | [поиск](#)



## ГЛАВА 3. Стационарное магнитное поле в вакууме

### 3.3. Векторный потенциал магнитного поля. Вихревой характер магнитного поля

Из теоремы Гаусса для векторного поля  $\vec{B}$  в дифференциальной форме (3.28) следует, что поле  $\vec{B}$  можно представить в виде ротора вспомогательного векторного поля  $\vec{A}$ , называемого векторным потенциалом:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \quad (3.34)$$

поскольку  $\text{div } \text{rot } \vec{A} \equiv 0, \forall \vec{A}$ . Физический смысл в магнитостатике приписывают векторному полю  $\vec{B}$ , поэтому векторный потенциал, вообще говоря, определен с точностью до градиента любой скалярной функции. Действительно, если  $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \varphi$ , где  $\varphi$  - скалярное поле, и  $\vec{B}' = \text{rot } \vec{A}'$ , то имеем:

$$\vec{B}' = \text{rot } \vec{A}' = \text{rot } \vec{A} + \text{rot } \text{grad } \varphi = \vec{B} + 0, \text{ то есть } \vec{B}' = \vec{B} \text{ для } \forall \varphi, \text{ поскольку } \text{rot } \text{grad } \varphi \equiv 0.$$

Произвол в определении векторного потенциала  $\vec{A}$  можно использовать, потребовав дополнительно выполнения условия

$$\text{div } \vec{A} = 0. \quad (3.35)$$

Условие (3.35) называют "кулоновской калибровкой векторного потенциала магнитного поля".

Условие (3.35) влечет за собой далеко идущие последствия, поэтому весьма важным является вопрос, во всех ли случаях магнитное поле обладает указанными свойствами.

Из соотношений (3.2) и (3.4) следует, что магнитное поле, образованное отдельным точечным электрическим зарядом  $q$ , движущимся со скоростью  $\vec{v}$ , имеет вид:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \vec{r}}{4\pi r^3}. \quad (3.36)$$

Векторный потенциал такого поля описывается выражением:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 q \vec{v}}{4\pi r}. \quad (3.37)$$

В современной магнитостатике не существует методики вывода выражения (3.37), его необходимо просто угадать, но зато можно проверить:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \text{rot} \left( \frac{\vec{v}}{r} \right) = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \vec{r}}{4\pi r^3}. \quad (3.38)$$

Сравнивая между собой выражение (3.37) для векторного потенциала и выражение для скалярного потенциала электростатического поля отдельного точечного электрического заряда

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad (3.39)$$

получаем зависимость:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \cdot \vec{\nabla} \cdot \varphi. \quad (3.40)$$

Зависимость (3.40) имеет глубокий физический смысл: закон Кулона и закон Ампера являются внутренне связанными между собой, не надо думать, что они полностью независимы друг от друга.

Из соотношений (3.39) и (3.37) можно получить:

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho}{r} dV, \quad (3.41)$$

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}}{r} dV, \quad (3.42)$$

где  $\rho$  - объемная плотность электрического заряда,  $\vec{j}$  - вектор объемной плотности тока,  $dV$  - элемент объема. Обращает на себя внимание идентичность форм записи выражений (3.41) и (3.42), особенно, если последнее рассматривать в координатной форме.

Но если для потенциала электростатического поля  $\varphi(x, y, z)$  справедливо уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (3.43)$$

то для поля векторного потенциала  $\vec{A}$  должно иметь место аналогичное уравнение:

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}. \quad (3.44)$$

Формально:

$$\Delta\vec{A} \equiv \text{grad div } \vec{A} - \text{rot rot } \vec{A}. \quad (3.45)$$

Если при этом выполнено условие (3.35), то из уравнения (3.44) следует второе фундаментальное свойство магнитного поля:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0\vec{j}. \quad (3.46)$$

Покажем, что условие (3.35) действительно выполняется. Из выражения (3.42) следует:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (3.47)$$

где  $V'$  - объем, в котором текут токи с объемной плотностью  $\vec{j}$ . В выражении (3.47) штрихованные переменные описывают место расположения элемента тока  $\vec{j} dV'$ , а не штрихованные - положение точки

наблюдения. Величина  $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$ , при заданной конфигурации токов она зависит от координат точки наблюдения.

Дивергенцию векторного поля следует вычислять по координатам точки наблюдения:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \operatorname{div} \left( \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV'. \quad (3.48)$$

Формально

$$\operatorname{div} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\operatorname{div}' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\operatorname{div}' \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

где операция  $\operatorname{div}'$  выполняется по штрихованным переменным. Полученное справа выражение по форме сложнее, но имеет два преимущества. Первое из них состоит в возможности воспользоваться уравнением сохранения электрического заряда в условиях магнитостатики:

$$\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}') = 0, \quad \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \right), \quad (3.49)$$

благодаря чему второе слагаемое в правой части просто обращается в нуль. Второе преимущество состоит в возможности преобразовать объемный интеграл в поверхностный по теореме Остроградского-Гаусса. В итоге имеем:

$$\operatorname{div} \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{n}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS'. \quad (3.50)$$

При расчете величины  $\vec{A}$  необходимо учитывать вклад всех токов, текущих в объеме  $V'$ , ограниченном замкнутой поверхностью  $S'$ . Эти токи не могут пересечь поверхность  $S'$ , последнее означало бы возможность накопления заряда вне объема  $V'$ , что недопустимо по условиям магнитостатики. Это означает, что в каждой точке поверхности  $S'$  должно выполняться условие

$$\vec{j} \cdot \vec{n}' dS' = 0, \quad (3.51)$$

что приводит к результату [\(3.35\)](#).

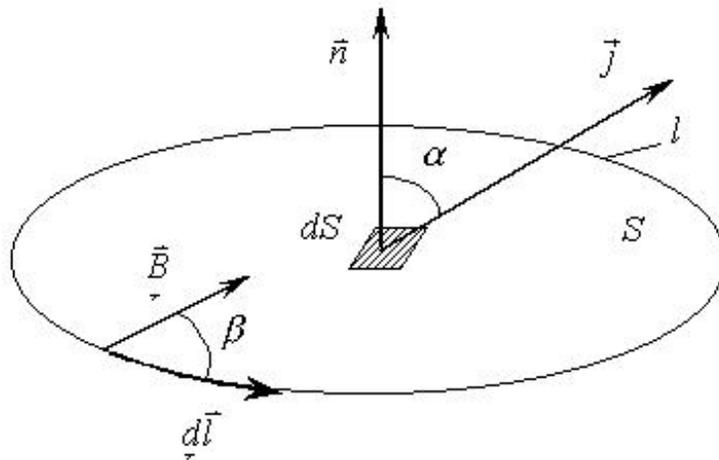


Рис. 3.3.

*К вопросу о циркуляции вектора магнитной индукции по замкнутому контуру*

Вернемся к уравнению (3.46). В силу математической теоремы Стокса получаем:

$$\int_S \text{rot} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS = \mu_0 \mathfrak{I} = \oint_l \vec{B} \, d\vec{l}.$$

Иными словами говоря, циркуляция вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  по замкнутому контуру  $l$ , равна потоку вектора объемной плотности тока  $\vec{j}$  через произвольную поверхность  $S$ , натянутую на этот контур, если направление обхода контура и направление нормали к поверхности  $S$  согласованы между собой по правилу правого винта:

$$\oint_l \vec{B} \, d\vec{l} = \mu_0 \mathfrak{I}. \quad (3.52)$$

Основные результаты настоящего раздела:

Отсутствие магнитных зарядов в природе,  
вихревой (непотенциальный) характер поля  $\vec{B}$ :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \quad \oiint \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}, \quad \oiint \vec{B} \, d\vec{l} = \mu_0 \mathcal{S}, \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

и все это следствие законов Ампера и Био-Савара-Лапласа.

[предыдущая](#) | [наверх](#) | [следующая](#)

© 2002. МГТУ им. Н.Э.Баумана | Designed by krE[Sote]

[об учебнике](#) | [содержание](#) | [поиск](#)

**ГЛАВА 4. Магнитное поле в веществе (феноменологическое описание)****4.1. Магнитный диполь**

Пусть в некотором конечном объеме  $V$  безграничного пространства текут электрические токи с объемной плотностью  $\vec{j}$ . Предположим, что для рассматриваемого объема выполнено условие

$$\int_V \vec{j} dV = 0. \quad (4.1)$$

Введем в рассмотрение величину

$$\vec{p}_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times \vec{j} dV, \quad (4.2)$$

которую назовем магнитным моментом системы токов в объеме  $V$ . В определении (4.2)  $\vec{r}$  - радиус-вектор элемента тока  $\vec{j} dV$ . Можно проверить, что величина (4.2) характеризует систему токов в объеме  $V$  и не зависит от выбора положения начала координат системы отсчета. Действительно, если

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}, \quad \vec{a} = \text{const}, \quad \vec{p}'_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{r}' \times \vec{j} dV,$$

то

$$\vec{p}'_m = \frac{1}{2} \int_V (\vec{r} + \vec{a}) \times \vec{j} dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times \vec{j} dV + \vec{a} \times \left( \frac{1}{2} \int_V \vec{j} dV \right).$$

Учитывая условие (4.1), убеждаемся, что

$$\vec{p}'_m = \vec{p}_m.$$

Если ток  $\mathcal{I}$  течет по тонкому проводнику, имеет место очевидная замена  $\vec{j} dV = \mathcal{I} d\vec{l}$ , при этом направление тока  $\mathcal{I}$  считается положительным, если оно совпадает с направлением ориентированного отрезка контура  $d\vec{l}$ . В этом случае

$$\vec{p}_m = \frac{1}{2} \oint_l \vec{r} \times \mathcal{I} d\vec{l}, \quad (4.3)$$

если выполнено условие

$$\oint_l \mathcal{I} d\vec{l} = 0. \quad (4.4)$$

В простейшем случае замкнутого контура величина  $\oint \mathbf{d}\vec{l}$  постоянна для всех элементов рассматриваемого контура, что приводит к соотношениям:

$$\vec{p}_m = \frac{\Im}{2} \oint \vec{r} \times \mathbf{d}\vec{l}, \quad \oint \mathbf{d}\vec{l} = 0. \quad (4.5)$$

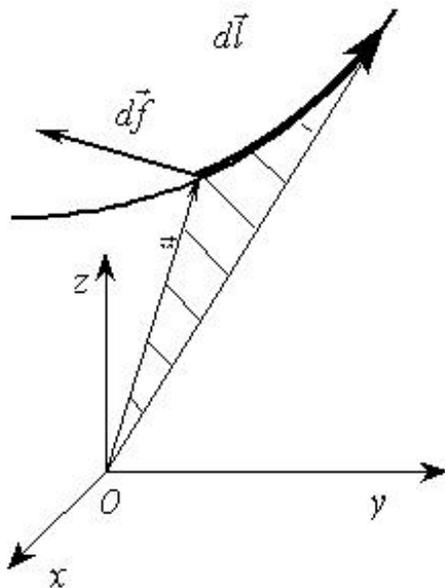


Рис. 4.1.

*К определению дипольного момента контура с током*

Заметим, что второе из соотношений (4.5) - формальное требование замкнутости контура.

Векторное произведение в первом из соотношений (4.5) можно преобразовать:

$$\frac{1}{2} \vec{r} \times \mathbf{d}\vec{l} = \mathbf{d}\vec{f},$$

где  $\mathbf{d}\vec{f}$  - ориентированный элемент площади треугольника, образованного векторами  $\vec{r}$  и  $\mathbf{d}\vec{l}$ . С учетом этого преобразования получаем:

$$\vec{p}_m = \Im \int \mathbf{d}\vec{f}. \quad (4.6)$$

Допустим, что на рассматриваемый контур  $l$  с током  $\mathcal{I}$  "натянута" поверхность  $S$ , для которой выполнены известные условия непрерывности и гладкости. Боковая поверхность конуса, составленная из элементов поверхности  $d\mathcal{f}$ , и поверхность  $S$  в совокупности образуют замкнутую поверхность, для которой

$$\oint d\vec{f} = 0. \quad (4.7)$$

Заметим, что выражение (4.7) справедливо, если нормаль к поверхности  $S$  направлена внутрь конического тела.

Из соотношения (4.7) следует:

$$\int d\vec{f} = -\int d\vec{S},$$

а если сменить направление нормали к элементу поверхности  $dS$  на противоположное, то получим

$$\int d\vec{f} = \int d\vec{S}.$$

Таким образом, магнитный момент пространственного (не лежащего целиком в какой-либо плоскости) замкнутого контура с током  $\mathcal{I}$  определен соотношением:

$$\vec{p}_m = \mathcal{I} \int d\vec{S} = \mathcal{I} \int \vec{n} dS. \quad (4.8)$$

Следует заметить, что в рассмотренном построении естественным образом возникло правило согласования между собой положительного направления обхода контура (направление  $d\vec{l}$ ) и направления нормали  $\vec{n}$  к элементам поверхности, натянутой на этот контур.

Если замкнутый контур с током является плоским, тогда вектор нормали к плоской поверхности сохраняет одно и то же направление для всех элементов плоской поверхности, величину  $\vec{n}$  можно вынести из под знака интеграла (4.8), а оставшееся выражение проинтегрировать:

$$\vec{p}_m = \mathcal{I} S \cdot \vec{n} \quad (4.9)$$

Заметим, что для плоского контура справедливы формулы и (4.8) и (4.9),

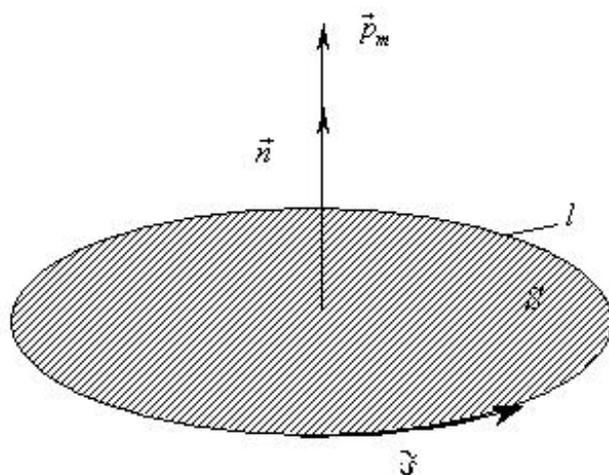


Рис. 4.2.

Дипольный момент плоского контура  $l$  с током  $I$

только поверхность в выражении (4.8) - произвольная, а в выражении (4.9) - обязательно плоская.

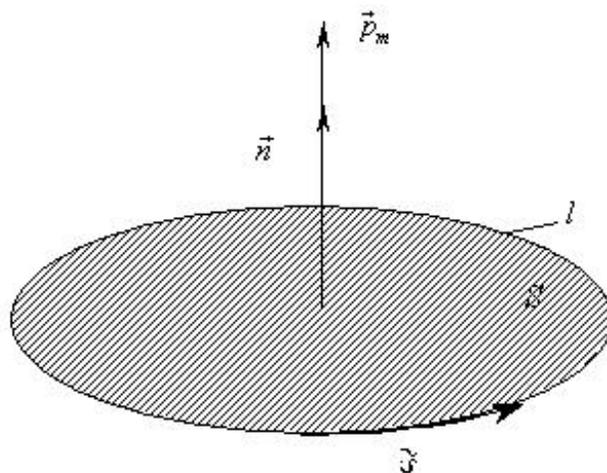


Рис. 4.3.  
Элементарный контур с током

Для более отчетливого выявления физического понятия "магнитный момент контура с током" рассмотрим равномерное движение частицы с массой  $m$  и электрическим зарядом  $q$  в выражении (4.8) - по окружности радиуса  $r$  со скоростью  $u$ .

Длина окружности определена соотношением  $l = 2\pi r$ , циклическая частота прохождения заряженной частицей контрольной точки траектории равна  $\nu = u / (2\pi r)$ . Последнее означает, что заряд  $q$  за единицу времени  $\nu$  раз пересечет контрольное сечение. Получается, что рассматриваемое движение заряженной частицы эквивалентно элементарному току

$$\mathcal{I} = \frac{qu}{2\pi r}.$$

Если учесть, что площадь круга равна  $\pi r^2$ , то для величины магнитного момента получим выражение:

$$\vec{p}_m = \frac{qur}{2} \vec{n}. \quad (4.10)$$

Механический момент количества движения рассматриваемой частицы по определению равен

$$\vec{L} = mur \cdot \vec{n}. \quad (4.11)$$

Для положительно заряженной частицы вектор  $\vec{p}_m$  и вектор  $\vec{L}$  совпадают по направлению. Для отрицательно заряженной частицы ( $q < 0$ ) направление тока по контуру противоположно направлению движения частицы (понятие "ток" вводят первоначально как движение положительных зарядов). Из соотношений (4.10) и (4.11) следует

$$\vec{p}_m = \Gamma \cdot \vec{L}, \quad \Gamma = \frac{q}{2m}. \quad (4.12)$$

Величина  $\Gamma$  называется "гиромагнитным отношением", для отрицательно заряженных частиц гиромагнитное отношение отрицательно.

Формула (4.12) вскрывает связь между моментом количества движения (механическая система) и магнитным моментом системы токов (электрическая система). Для отдельно взятой заряженной материальной частицы наличие момента количества движения с необходимостью влечет наличие магнитного момента системы. Для системы частиц дело обстоит сложнее. Проблема решается с помощью принципа суперпозиции как по моменту количества движения, так и по магнитному моменту системы элементарных токов. Вполне возможными являются случаи  $\sum \vec{L}_i = 0, \sum \vec{p}_m \neq 0$  и наоборот  $\sum \vec{p}_m = 0, \sum \vec{L}_i \neq 0$ .

[предыдущая](#) | [наверх](#) | [следующая](#)

© 2002. МГТУ им. Н.Э.Баумана | Designed by krE[Sote]

[об учебнике](#) | [содержание](#) | [поиск](#)

## ГЛАВА 4. Магнитное поле в веществе (феноменологическое описание)

### 4.2. Магнитное поле контура с током

Строгое определение характеристик магнитного поля контура с током следует из закона Био-Савара-Лапласа и принципа суперпозиции:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mathcal{I}}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \text{rot} \vec{A}, \quad (4.13)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \mathcal{I}}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (4.14)$$

В выражениях (4.13) и (4.14)  $\vec{r}$  - радиус-вектор точки наблюдения,  $\vec{r}'$  - радиус-вектор отрезка  $d\vec{l}$  замкнутого контура,  $\mathcal{I}$  - ток, текущий в контуре (постоянный для каждого поперечного сечения контура).

Выражения (4.13) и (4.14) для "дальней зоны", то есть для точек наблюдения, расположенных на расстоянии, значительно большем, чем характерный линейный размер контура, могут быть записаны в более простой приближенной форме. При этом более отчетливо выявляется характер убывания величин (4.13) и (4.14) с удалением точки наблюдения от "точечного" контура с током. Эти зависимости имеют вид:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \mathcal{I} \vec{p}_m \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (4.15)$$

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\vec{p}_m \nabla) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{p}_m \cdot \vec{e}_{rr'}) \cdot \vec{e}_{rr'} - \vec{p}_m}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (4.16)$$

В выражении (4.16)  $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$  - оператор Гамильтона (оператор набла) в

декартовой системе координат,  $\vec{e}_{rr'}$  - единичный орт направления из места расположения контура с током в точку наблюдения. Оказывается, что векторный потенциал магнитного поля убывает с увеличением расстояния от контура с током обратно пропорционально квадрату расстояния, а поле магнитной индукции - обратно пропорционально кубу расстояния. Эти результаты удивительным образом совпадают с результатами исследования электростатического поля вдали от "точечного"

диполя с электрическим моментом  $\vec{p}$ .

Докажем справедливость приближенных выражений (4.15) и (4.16). При этом оказывается полезной одна из форм математической теоремы Стокса:

$$\oint_l \varphi d\vec{l} = \int_S (\mathbf{d}\vec{S} \times \nabla) \cdot \varphi \quad (4.17)$$

С учетом этого соотношения выражение (4.14) можно переписать в виде:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \mathcal{I}}{4\pi} \oint_l \frac{d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0 \mathcal{I}}{4\pi} \int_S (\mathbf{d}\vec{S} \times \nabla) \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4.18)$$

Поскольку величина  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  - скалярная величина, выражение (4.18) принимает вид:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \mathcal{I}}{4\pi} \int_S \mathbf{d}\vec{S} \times g \operatorname{rad} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right). \quad (4.19)$$

Заметим, что вычисление градиента в подынтегральном выражении (4.19) необходимо провести "по штрихованным переменным":

$$g \operatorname{rad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (4.20)$$

Соотношение (4.20) проверяется непосредственным вычислением.

Если учесть, что точка наблюдения расположена "далеко" от контура, т. е. зависимость  $\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

в пределах изменения  $\vec{r}'$  вдоль точек контура меняется слабо, точное соотношение (4.19) перепишем в форме:

$$\vec{A} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \mathcal{I} \int_S \mathbf{d}\vec{S} \right) \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{p}_m \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (4.21)$$

где  $\vec{r}'$  - радиус-вектор "точки" расположения контура с током. Легко видеть, что соотношения (4.21) и (4.15) полностью совпадают друг с другом. Заметим, что соотношение (4.15) оказывается справедливым и для случая токов в малом объеме без предположения о том, что ток течет по тонкому контуру, это доказательство можно найти в более полных руководствах по электродинамике.

Зависимость (4.16) получается из зависимости (4.15) непосредственным вычислением, при этом необходимо помнить, что  $\operatorname{rot} \vec{A}$  вычисляется по координатам точки наблюдения. В процессе вычислений оказывается полезной формула векторного анализа:

$$\operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \nabla) \vec{a} - (\vec{a} \nabla) \vec{b} + \vec{a} \operatorname{div} \vec{b} - \vec{b} \operatorname{div} \vec{a}.$$

С учетом того, что  $\vec{p}_m$  является постоянной векторной величиной, и легко проверяемым результатом

$$\operatorname{div} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = 0,$$

приходим к соотношению

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\vec{P}_m \nabla) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (4.22)$$

Далее проводим вычисления в координатной форме и записываем результат в компактной векторной форме. Соотношения (4.15) и (4.16) доказаны.

[предыдущая](#) | [наверх](#) | [следующая](#)

© 2002. МГТУ им. Н.Э.Баумана | Designed by krE[.]Sote



[об учебнике](#) | [содержание](#) | [поиск](#)



## ГЛАВА 4. Магнитное поле в веществе (феноменологическое описание)

### 4.3. Магнитный диполь во внешнем магнитном поле

Рассмотрим малый тонкий замкнутый контур  $l$ , по которому течет ток  $\mathcal{S}$  в направлении вектора  $d\vec{l}$ . Если этот контур помещен во внешнее по отношению к нему магнитное поле с магнитной индукцией  $\vec{B}$ , то по выражению для силы Ампера можно рассчитать силу, действующую на контур в целом:

$$d\vec{F}_A = \mathcal{S} d\vec{l} \times \vec{B}, \quad (4.23)$$

$$\vec{F}_A = \mathcal{S} \oint d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (4.24)$$

При вычислении выражения (4.24) оказывается полезной обобщенная теорема Стокса (математическое утверждение):

$$\oint_l d\vec{l} \times \vec{B} = \int_S (d\vec{S} \times \nabla) \times \vec{B}, \quad (4.25)$$

где оператор  $\nabla$  имеет общепринятое представление. Воспользуемся допущением, что характерный линейный размер контура с током (магнитный диполь) мал по сравнению с характерным линейным размером, на котором существенно изменяются параметры внешнего магнитного поля, и вынесем из под знака интеграла мало меняющиеся величины:

$$\vec{F} = \left( \left( \mathcal{S} \int_S d\vec{S} \right) \times \nabla \right) \times \vec{B} = (\vec{p}_m \times \nabla) \times \vec{B}. \quad (4.26)$$

Далее используем известное тождество векторного анализа

$$(\vec{A} \times \nabla) \times \vec{B} = (\vec{A} \nabla) \vec{B} + \vec{A} \times \text{rot } \vec{B} - \vec{A} \cdot \text{div } \vec{B},$$

и то обстоятельство, что  $\text{div } \vec{B} = 0$ , и получим:

$$\vec{F} = (\vec{p}_m \nabla) \cdot \vec{B} + \vec{p}_m \times \text{rot } \vec{B}. \quad (4.27)$$

Заметим, что формула (4.27) отличается от подобной ей формулы для электрического диполя в электрическом поле напряженности  $\vec{E}$  вторым слагаемым. Дело в том, что в электростатике имеет место уравнение  $\text{rot } \vec{E} = 0$ , а в магнитостатике имеем  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ , поэтому в отсутствие объемной плотности токов  $\vec{j}$ , текущих в точке расположения диполя  $\vec{p}_m$ , получаем

$$\vec{F} = (\vec{p}_m \nabla) \cdot \vec{B}, \quad (\vec{j} = 0), \quad (4.28)$$

а в общем случае справедлива формула (4.27). С учетом того, что величина  $\vec{p}_m$  - постоянная векторная величина, а  $\text{div } \vec{B} = 0$ , формулу (4.27) можно записать в виде:

$$\vec{F} = \nabla (\vec{p}_m \square \vec{B}). \quad (4.29)$$

Из полученных зависимостей следует, что результирующая сила, действующая на малый контур с током во внешнем магнитном поле, отлична от нуля только в неоднородном векторном поле магнитной индукции  $\vec{B}$ .

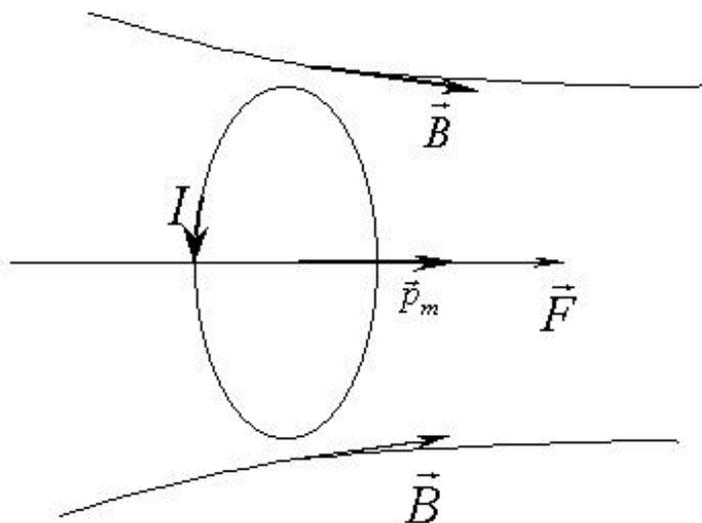


Рис. 4.4.

*Магнитный диполь взаимодействует с внешним магнитным полем*

Элементарный момент силы Ампера, действующий на элемент  $d\vec{l}$  контура с током  $\mathcal{I}$ , относительно начала координат описывается выражением:

$$d\vec{M} = \vec{r} \times (\mathcal{I} d\vec{l} \times \vec{B}) = \mathcal{I} d\vec{l} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{B}) - \mathcal{I} (d\vec{l} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{B}, \quad (4.30)$$

где  $\vec{r}$  - радиус-вектор расположения элемента  $d\vec{l}$ . Для замкнутого контура имеем:

$$\vec{M} = \oint \vec{dl} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{B}) - \oint (\vec{dl} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{B} \quad (4.31)$$

После использования обобщенной теорема Стокса получаем:

$$\vec{M} = \oint_S (\vec{dS} \times \nabla) \cdot (\vec{r} \cdot \vec{B}) - \oint_S ((\vec{dS} \times \nabla) \cdot \vec{r}) \cdot \vec{B}. \quad (4.32)$$

Вынося за знак интеграла медленно меняющиеся функции и вспоминая определение магнитного момента диполя, получаем:

$$\vec{M} = (\vec{p}_m \times \nabla) (\vec{r} \cdot \vec{B}) - ((\vec{p}_m \times \nabla) \cdot \vec{r}) \cdot \vec{B} \quad (4.33)$$

Далее используем соотношения:

$$\begin{aligned} (\vec{p}_m \times \nabla) (\vec{r} \cdot \vec{B}) &\equiv \vec{p}_m \times (\nabla (\vec{r} \cdot \vec{B})) \\ \nabla (\vec{r} \cdot \vec{B}) &\equiv (\vec{r} \nabla) \vec{B} + (\vec{B} \nabla) \vec{r} + \vec{r} \times \text{rot } \vec{B} + \vec{B} \times \text{rot } \vec{r}, \\ \text{rot } \vec{r} &\equiv 0, \quad (\vec{B} \nabla) \vec{r} \equiv \vec{B} \end{aligned}$$

и получаем:

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B} + \vec{p}_m \times (\vec{r} \nabla) \vec{B} + \vec{p}_m \times (\vec{r} \times \text{rot } \vec{B}) - ((\vec{p}_m \times \nabla) \cdot \vec{r}) \vec{B}. \quad (4.34)$$

Последний член в правой части формулы (4.34) тождественно равен нулю, а второй и третий связаны с расстоянием диполя от начала координат. Если начало координат расположить в месте расположения диполя, эти члены обратятся в ноль. Только первое слагаемое формулы (4.34) не зависит от выбора начала координат и в силу этого представляет собой момент сил, действующий на малый замкнутый контур с током во внешнем магнитном поле с магнитной индукцией  $\vec{B}$ :

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}. \quad (4.35)$$

Выражение (4.35) совпадает по форме с аналогичным выражением для момента сил, действующих на малый электрический диполь  $\vec{p}$  во внешнем электрическом поле напряженности  $\vec{E}$ . Момент  $\vec{M}$  обращается в ноль при условии параллельности (или антипараллельности) векторов  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$ , т. е. если  $\vec{p}_m$  направлен строго по внешнему полю  $\vec{B}$ , или строго против внешнего поля  $\vec{B}$ . При малом отклонении вектора  $\vec{p}_m$  от направления  $\vec{B}$  (если это направление было состоянием равновесия) возникающий момент сил имеет "возвращающий" характер и в гармоническом приближении пропорционален углу отклонения.

Если вернуться к формуле (4.29), то ее структура позволит нам сделать предположение, что потенциальная функция магнитного диполя во внешнем магнитном поле имеет вид.

$$U = -\vec{p}_m \cdot \vec{B} = -p_m \cdot B \cdot \cos \alpha, \quad (4.36)$$

где  $\alpha$  - угол между векторами  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$ .

Ниже обсудим границы применимости соотношения (4.36). Вычислим дифференциал функции (4.36):

$$-dU = d\vec{p}_m \cdot \vec{B} + \vec{p}_m \cdot d\vec{B} = d\vec{\varphi} \times \vec{p}_m \cdot \vec{B} + \vec{p}_m (d\vec{r} \nabla) \vec{B}. \quad (4.37)$$

Изменение потенциальной функции (4.37) учитывает возможность поворота вектора  $\vec{p}_m$  на угол  $d\vec{\phi}$  и смещение его как целого на вектор  $d\vec{r}$ , при этом предполагается, что модуль величины  $p_m$  сохраняет постоянное значение. Из соотношения (4.37) можно получить:

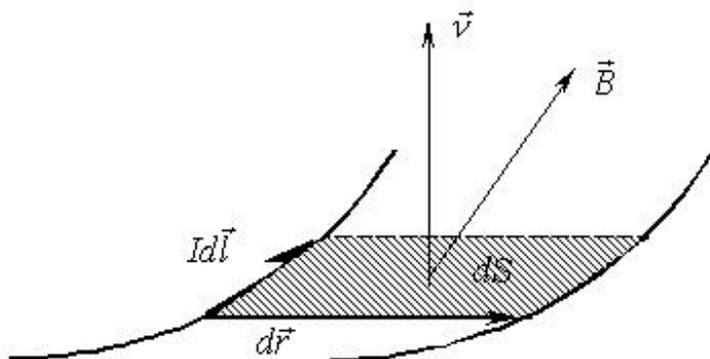
$$-dU = \left( (\vec{p}_m \nabla) \vec{B} + \vec{p}_m \times \text{rot } \vec{B} \right) \cdot d\vec{r} + (\vec{p}_m \times \vec{B}) \cdot d\vec{\phi} \quad (4.38)$$

В зависимости (4.38) сомножитель при  $d\vec{r}$  представляет собой силу, а сомножитель при элементарном угле поворота  $d\vec{\phi}$  - момент сил, действующих на магнитный диполь.

Благодаря этим результатам выражение (4.36) можно принять за потенциальную функцию магнитного диполя во внешнем магнитном поле.

Заметим, что в соответствии с выражением (4.36) потенциальная функция магнитного диполя во внешнем магнитном поле минимальна, если вектор магнитного момента диполя ориентирован по силовой линии магнитной индукции, и максимальна, если вектор магнитного момента диполя ориентирован строго против направления вектора магнитной индукции. Состояние системы с первой ориентацией более предпочтительное, состояние со второй ориентацией является неустойчивым.

Существенным различием проявления свойств электрического и магнитного диполей является то, что электрический диполь "внутри себя" ослабляет внешнее поле, вдоль силовой линии которого он ориентирован, а магнитный диполь усиливает внешнее поле вдоль силовой линии, если она проходит через "контур диполя".



## Рис. 4.5.

## Смещение контура с током во внешнем магнитном поле

Учитывая важность вычисления работы при перемещениях или деформациях замкнутого или разомкнутого контура с током для практических приложений, вычислим эту величину без учета предположения о малой величине замкнутого контура.

Рассмотрим сначала разомкнутый контур с элементом тока  $\mathcal{I} d\vec{l}$ . Если в процессе движения элемент с током смещается на величину  $d\vec{r}$ , то работа, совершаемая при этом, равна

$$dA = \mathcal{I} d\vec{l} \times \vec{B} \cdot d\vec{r}. \quad (4.39)$$

Поскольку

$$d\vec{l} \times \vec{B} \cdot d\vec{r} \equiv \vec{B} \cdot (d\vec{r} \times d\vec{l})$$

в силу свойств смешанного произведения векторов, а  $d\vec{r} \times d\vec{l} = \vec{\nu} dS$ , где  $\vec{\nu}$  - вектор единичной нормали к элементу поверхности  $dS$ , образованного векторами  $d\vec{r}$  и  $d\vec{l}$ , то из соотношения (4.39) получаем:

$$dA = \mathcal{I} \cdot \vec{B} \cdot \vec{\nu} dS = \mathcal{I} d\Phi, \quad (4.40)$$

где  $d\Phi$  - элемент потока вектора  $\vec{B}$  через поверхность  $dS$ . Для работы в целом имеет место соотношение

$$A = \mathcal{I} \cdot \Phi = \mathcal{I} \int_S \vec{B} \cdot \vec{\nu} \cdot dS. \quad (4.41)$$

По выводу зависимости (4.41) поверхность  $S$  построена как поверхность, "ометаемая" отрезком  $l$  кривой, по которому течет ток, в реальном движении. В силу свойств магнитостатического поля

$\left( \oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0, \forall S, \int_S d\vec{S} = 0 \right)$  в формуле (4.41) можно использовать любую (произвольную)

поверхность, которая опирается на замкнутый контур из начального положения отрезка кривой  $l$ , конечного положения отрезка кривой  $l$  и из траектории начальной граничной точки и траектории конечной граничной точки рассматриваемого отрезка.

Рассмотрим замкнутый контур  $l$ , по которому течет ток  $\mathcal{I}$  во внешнем магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ .

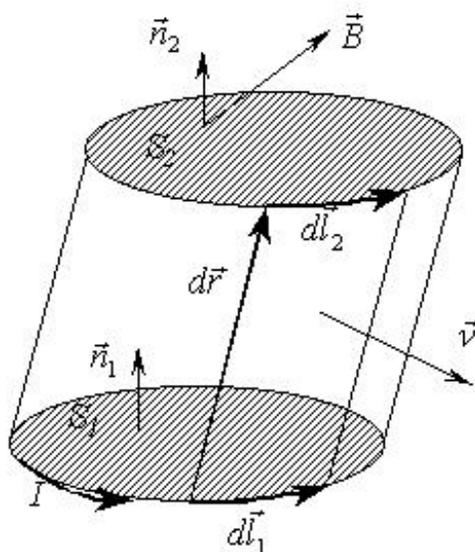


Рис. 4.6.

*К расчету работы при перемещении замкнутого контура с током во внешнем магнитном поле*

Пусть начальное положение контура  $l$  описывалось кривой  $l_1$ , а конечное -  $l_2$  (рис. 4.3). Пусть на контур  $l_1$  натянута поверхность  $S_1$  а на контур  $l_2$  натянута поверхность  $S_2$ , а боковая поверхность "ометаемого" тела построена как поверхность, по которой перемещается элемент  $d\vec{l}$  из положения  $d\vec{l}_1$  в положение  $d\vec{l}_2$ .

С точностью до бесконечно малых второго порядка запишем выражение для работы по перемещению элемента с током  $\mathcal{I}d\vec{l}$  из первого положения во второе:

$$dA = \mathcal{I}d\vec{l}_1 \times \vec{B} \cdot d\vec{r} \equiv \mathcal{I}\vec{B} \cdot (d\vec{r} \times d\vec{l}_1) = -\mathcal{I}\vec{B} \cdot \vec{\nu} df, \quad (4.42)$$

где  $df$  -элемент боковой поверхности описанного выше тела,  $\vec{\nu}$  -направление внешней нормали к этому элементу. Из теоремы Гаусса в интегральной форме для вектора  $\vec{B}$  легко получить

$$\int_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n}_1 dS_1 = \int_f \vec{B} \cdot \vec{\nu} df + \int_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n}_2 dS_2. \quad (4.43)$$

Из соотношения (4.43) следует:

$$A = \mathfrak{S} \left( \int_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n}_2 \, dS_2 - \int_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n}_1 \, dS_1 \right) = \mathfrak{S} \Delta \Phi = \mathfrak{S} \cdot (\Phi_2 - \Phi_1). \quad (4.44)$$

Соотношение (4.44) получено без использования предположения о малости контура с током.

Для элементарной работы по перемещению контура с током в пространстве получим

$$dA = \mathfrak{S} d\Phi = d(\mathfrak{S}\Phi) = d\left(\mathfrak{S} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}\right) \approx d\left[\left(\mathfrak{S} \int d\vec{S}\right) \cdot \vec{B}\right] = d(\vec{p}_m \vec{B}). \quad (4.45)$$

Подробная последовательность вычислений в формулах (4.45) проясняет, в каком месте существенно использована посылка о малой величине контура с током при выводе соотношения (4.36).

[предыдущая](#) | [наверх](#) | [следующая](#)

© 2002. МГТУ им. Н.Э.Баумана | Designed by krE[Sote]

[об учебнике](#) | [содержание](#) | [поиск](#)

**ГЛАВА 4. Магнитное поле в веществе (феноменологическое описание)****4.4. Магнитное поле в веществе. Гипотеза Ампера о молекулярных токах. Намагниченность вещества. Свойство намагниченности вещества. Напряженность магнитного поля**

Все природные вещества в той или иной мере обладают магнитными свойствами, эти вещества называют магнетиками. Частными случаями магнетиков являются пара- и диамагнетики, ферромагнетики и антиферромагнетики...

В начале исследования магнетизма для объяснения свойств постоянных магнитов Ампер выдвинул смелую по тем временам гипотезу о существовании так называемых "молекулярных токов", совокупность которых объясняет магнитные свойства вещества. В настоящее время гипотеза Ампера представляется чуть ли не очевидной, физические механизмы, ответственные за магнитные свойства веществ, изучены значительно более глубоко, чем это было возможно во времена Ампера. Магнитным свойством веществ посвящены многие специальные руководства.

Рассмотрим достаточно малый объем вещества. Допустим, что суммарный магнитный момент молекулярных токов (магнитных диполей) в этом объеме равен  $\vec{P}_m$ . В качестве количественной характеристики магнитного состояния среды примем по определению величину намагниченности

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\vec{P}_m}{\Delta V}. \quad (4.46)$$

В соответствии с определением (4.46) намагниченность (вектор намагничивания)  $\vec{M}$  представляет собой магнитный момент единицы объема среды. Намагниченность является локальной характеристикой среды, она определяется в каждой точке пространства и образует соответствующее векторное поле.

Если магнитный момент элементарного молекулярного тока равен  $\vec{p}_{mi}$ , где  $i$  - порядковый номер этого тока в совокупности молекулярных токов объема  $\Delta V$ , то легко получить:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_{mi}}{\Delta V} = n \langle \vec{p}_m \rangle, \quad (4.47)$$

где  $n$  - объемная концентрация элементарных молекулярных токов в рассматриваемой точке пространства, а  $\langle \vec{p}_m \rangle$  - средний магнитный момент одного магнитного диполя.

Совокупность элементарных молекулярных токов образует объемную плотность  $\vec{j}'$  и силу тока  $\vec{J}'$  намагничивания. Токи проводимости (с объемной плотностью  $\vec{j}$  и силой тока

$\vec{J}$ ) связаны с носителями зарядов, которые могут относительно свободно перемещаться по проводнику.

Токи намагничивания могут существовать и в непроводящей электрический ток среде.

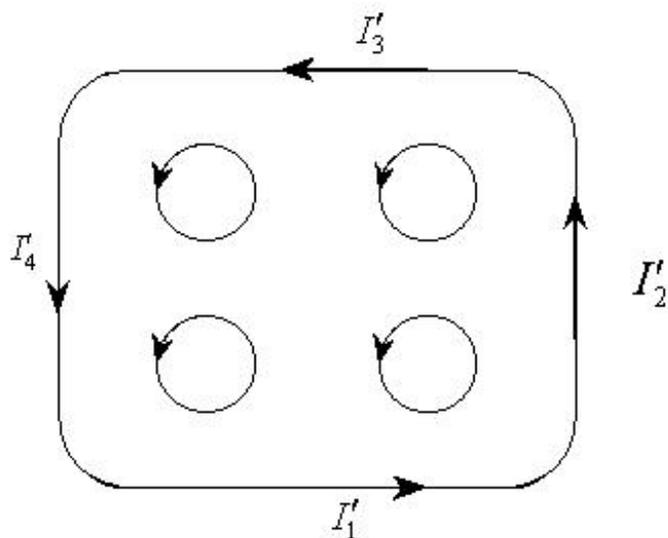


Рис. 4.7.

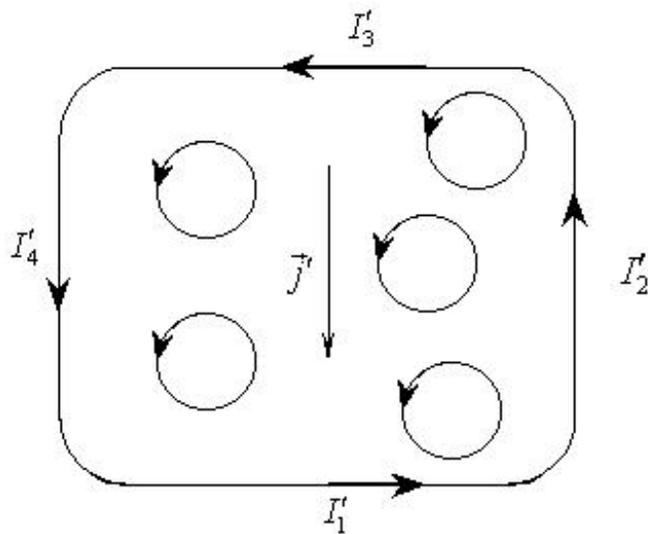
**Однородная намагниченность**

Представить себе наглядно физическую связь между намагниченностью и токами намагничения можно, анализируя случай однородного распределения магнитных диполей одного направления (рис.4.7).

Легко видеть, что внутри выделенного элемента вещества молекулярные токи компенсируют друг друга, некомпенсированным остается только ток по поверхности выделенного объема.

Обратим внимание на то, что направление тока намагничения на рис. 4.7 перпендикулярно ориентации магнитных диполей, то есть вектору намагничения

$$\vec{M}.$$



**Рис. 4.8.**  
**Неоднородная намагниченность**

В случае неоднородного распределения магнитных диполей одного направления, например, показанного на рис. 4.8, помимо поверхностных токов намагничения  $\mathcal{S}'$  возникает объемная плотность  $\vec{j}'$  токов намагничения как плотность некомпенсированных молекулярных токов.

Рассмотрим поверхность  $S$  в магнитном веществе, ограниченную замкнутым контуром  $l$  с выбранным положительным направлением обхода и ориентацией нормали к элементу площади ее поверхности (рис. 4.9). Ток намагничения определим соотношением

$$\mathcal{S}' = \int_S \vec{j}' \cdot \vec{n} \, dS, \quad (4.48)$$

где  $\vec{j}'$  возникает как плотность молекулярных некомпенсированных токов.

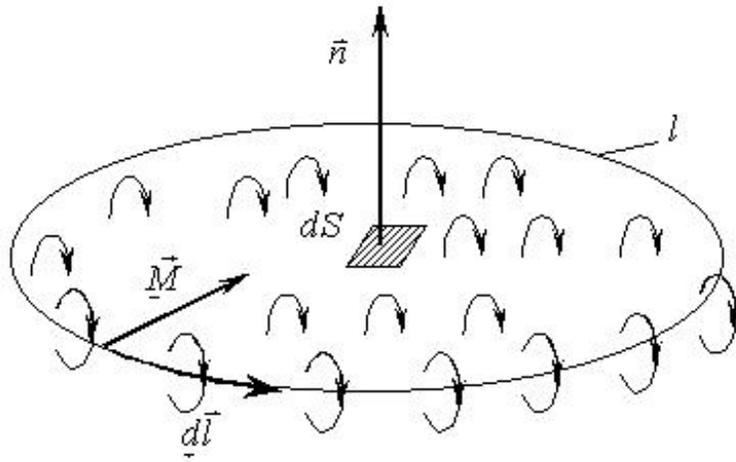


Рис. 4.9.  
Молекулярные токи

Легко видеть, что для внутренних точек поверхности  $S$  молекулярные токи, каждый в отдельности, пересекают поверхность  $S$  в одну сторону и другую, тем самым не создавая результирующего тока намагничения. Для приграничных точек поверхности  $S$  имеются молекулярные токи, которые огибают контур поверхности, т. е. пересекают рассматриваемую поверхность в одном направлении, тем самым создавая некомпенсированный ток через поверхность.

Если модуль отдельного магнитного диполя равен  $p_m = I_m \cdot S_m$ , ориентация магнитного диполя относительно элемента  $d\vec{l}$  описывается в среднем углом  $\alpha$ , то "ометаемой" площадкой  $S_m$  объем при перемещении на  $d\vec{l}$  составит величину  $dV = S_m \cdot \cos\alpha \cdot dl$ . Магнитные диполи в "ометаемом" объеме  $dV$  формируют ток намагничения

$$d\mathcal{I} = I_m \cdot n dV = I_m S_m \cdot n \cdot \cos\alpha dl, \quad (4.49)$$

где  $n$  - объемная концентрация магнитных диполей в окрестности элемента  $d\vec{l}$  контура  $l$ . Из соотношения (4.49) следует

$$d\mathcal{I}' = \vec{M} \cdot d\vec{l}. \quad (4.50)$$

Основное свойство намагниченности  $\vec{M}$  проявляется в том, что имеет место интегральное соотношение

$$\oint \vec{M} \cdot d\vec{l} = \mathfrak{S}' = \int_S \vec{j}' \cdot \vec{n} dS, \quad (4.51)$$

где  $l$  - замкнутый контур, поверхность  $S$  натянута на этот контур, направления векторов  $d\vec{l}$  и  $\vec{n}$  согласованы между собой, и его дифференциальный аналог (следствие классической теоремы Стокса):

$$\text{rot } \vec{M} = \vec{j}'. \quad (4.52)$$

В этих соотношениях  $\mathfrak{S}'$  - сила молекулярного тока,  $\vec{j}'$  - вектор объемной плотности силы молекулярного тока.

Заметим, что полученные соотношения являются следствием принятых за исходные определений (4.46) и (4.47)

Циркуляция вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  по замкнутому контуру в магнитной среде должна рассчитываться с учетом всех токов, которые условно разделены на ток проводимости  $\mathfrak{S}$  и ток молекулярный  $\mathfrak{S}'$ :

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (\mathfrak{S} + \mathfrak{S}'). \quad (4.53)$$

Анализируя совокупность соотношений (4.51) и (4.53), замечаем, что имеет место

$$\oint \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) d\vec{l} = \mathfrak{S}. \quad (4.54)$$

Полученная зависимость удобна тем, что в ее правой части стоит величина тока проводимости  $\mathfrak{S}$ , не связанная с молекулярной структурой вещества.

Введем в рассмотрение вектор напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (4.55)$$

и получим интегральное соотношение

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \mathfrak{S} = \int_S \vec{j}' \cdot \vec{n} dS, \quad (4.56)$$

и соответствующее ему (следствие классической теоремы Стокса) дифференциальное соотношение

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}'. \quad (4.57)$$

При феноменологическом подходе к описанию магнитной среды, не затрагивающем молекулярно-кинетическое строение среды, полагают, что

$$\vec{M} = \vec{M}(\vec{H}), \quad (4.58)$$

причем для многих веществ и "слабых" магнитных полей эта зависимость линейная и однородная:

$$\vec{M} = \chi \cdot \vec{H}, \quad (4.59)$$

где  $\chi$  - магнитная восприимчивость среды. При феноменологическом описании среды зависимость (4.59) и, в частности, величина  $\chi$  считаются известными или из опыта, или из рассмотрения соответствующих молекулярно-кинетических моделей среды.

Зависимость (4.59) позволяет записать "материальное уравнение" магнитной среды в форме

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (4.60)$$

где

$$\mu = 1 + \chi \quad (4.61)$$

носит название "магнитная проницаемость" среды.

Вопрос об объемной плотности некомпенсированных молекулярных токов решается прямым вычислением:

$$\begin{aligned} \vec{j}' &= \text{rot} \vec{M} = \text{rot} (\mu - 1) \vec{H} = (\mu - 1) \text{rot} \vec{H} + \text{grad} \mu \times \vec{H} = \\ &= (\mu - 1) \vec{j} - \vec{H} \times \text{grad} \mu \end{aligned} \quad (4.62)$$

Легко видеть, что  $\vec{j}'$  обусловлена токами проводимости и неоднородностью магнитных свойств среды.

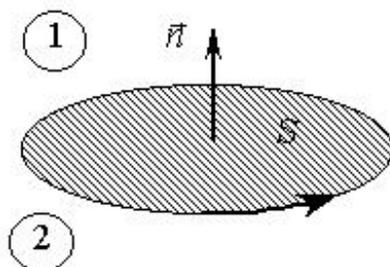
[предыдущая](#) | [наверх](#) | [следующая](#)

© 2002. МГТУ им. Н.Э.Баумана | Designed by krE[]Sote

[об учебнике](#) | [содержание](#) | [поиск](#)

**ГЛАВА 4. Магнитное поле в веществе (феноменологическое описание)****4.5. Соотношения на границе раздела двух магнетиков**

Пусть  $S$  - поверхность раздела двух магнетиков. Если к элементу поверхности  $dS$  провести направление нормали  $\vec{n}$ , то мы получаем возможность выделить пространство "над поверхностью  $S$ ". Верхнее полупространство будем считать "вторым", а нижнее - "первым".

*Рис. 4.10.**Условная индексация полупространств*

При анализе соотношений между компонентами векторных полей, характеризующими магнитное поле в веществе, возникающих на поверхности раздела двух сред, будем исходить из интегральных законов:

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = 0, \quad (4.63)$$

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \mathcal{I}. \quad (4.64)$$

Если соотношению (4.63) сопоставить соответствующее уравнение электростатики

$$\oint \vec{D} \cdot \vec{n} \, dS = Q \quad (4.65)$$

и следствие из него

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad (4.66)$$

то, отмечая идентичность математических форм интегральных законов магнито- и электростатики, можно записать результат

$$B_{2n} - B_{1n} = 0. \quad (4.67)$$

Конечно, можно было бы соотношение (4.67) вывести непосредственно, для этого пришлось бы повторить рассуждения, которые привели в электростатике к зависимости (4.66), применительно к векторному полю магнитной индукции.

Соотношение (4.64) для циркуляции напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ , в отличие от циркуляции электростатического поля  $\vec{E}$ , является неоднородным: в правой части соотношения (4.64) стоит сила тока проводимости через поверхность, опирающуюся на замкнутый контур  $l$ .

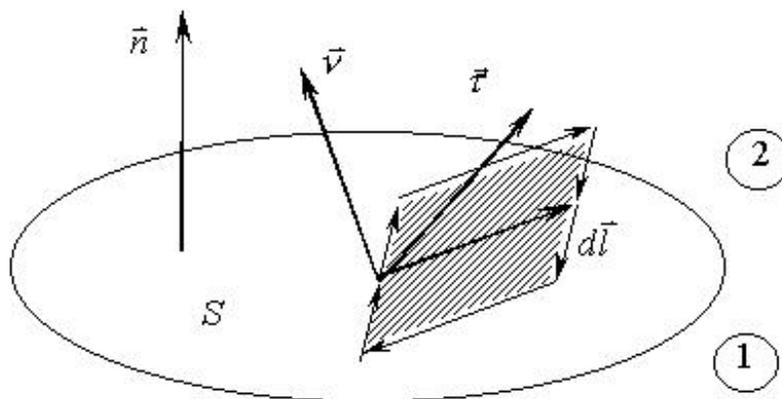


Рис. 4.11.

К определению связи касательных компонент вектора  $\vec{H}$  на границе раздела двух магнетиков

На ориентированной поверхности  $S$  (т.е. с выбранным направлением нормали  $\vec{n}$ ) проведем отрезок  $d\vec{l}$  произвольного направления ( $d\vec{l} \in S$ ).

Определим направление нормали  $\vec{\nu}$  к этому отрезку, лежащей в площадке  $dS$ :

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{n} \times d\vec{l}}{dl}. \quad (4.68)$$

Пусть на поверхности  $S$  течет поверхностный ток с линейной (погонной) плотностью  $\vec{i}$ , так что

$$d\mathcal{I} = \vec{i} \cdot \vec{\nu} dl = i \cos\alpha dl, \quad (4.69)$$

где  $\alpha$  - угол между векторами  $\vec{\nu}$  и  $\vec{i}$ .

Пусть над поверхностью  $S$  текут токи с объемной плотностью  $\vec{j}_2$ , а под поверхностью текут токи с объемной плотностью  $\vec{j}_1$ .

Через элемент  $d\vec{l}$  проведем плоскость, перпендикулярную поверхности  $S$ , в которой рассмотрим контур, образованный смещением отрезка  $d\vec{l}$  на высоту  $h$  вверх и вниз, считая положительное направление обхода этого контура согласованным с направлением нормали  $\vec{\nu}$ .

Интегральный закон (4.64) для напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  применительно к рассматриваемому контуру имеет вид:

$$\vec{H}_2 d\vec{l}'' + \vec{H}_1 d\vec{l}' + \text{const}_1 \cdot h = \text{const}_2 \cdot h + i \cos\alpha dl,$$

где  $d\vec{l}''$  описывает верхнюю часть контура,  $d\vec{l}'$  - нижнюю часть контура,  $\text{const}_1 \cdot h$  - оценка членов линейных интегралов по вертикальным участкам контура,  $\text{const}_2 \cdot h$  - оценка членов поверхностных интегралов, то есть силы тока за счет объемных токов  $\vec{j}_2$  и  $\vec{j}_1$ . Устремляя величину  $h$  к нулю и замечая, что  $d\vec{l}'' \rightarrow d\vec{l}$ ,  $d\vec{l}' = -d\vec{l}$ , получаем:

$$\vec{H}_2 d\vec{l} - \vec{H}_1 d\vec{l} = \vec{i} \cdot \vec{\nu} \cdot d\vec{l}.$$

Иначе:

$$\vec{H}_2 \frac{d\vec{l}}{dl} - \vec{H}_1 \frac{d\vec{l}}{dl} = \vec{i} \cdot \vec{\nu}. \quad (4.70)$$

Соотношение (4.70) часто пишут в форме:

$$H_{2t} - H_{1t} = i_v. \quad (4.71)$$

Физический смысл записи (4.71) раскрывается в соотношении (4.70).

В отличие от электростатики, где имеет место соотношение

$$E_{2t} - E_{1t} = 0,$$

для любого из множества допустимых направлений на поверхности раздела, в магнитостатике приходится учитывать ориентацию отрезка  $d\vec{l}$  на поверхности раздела двух магнетиков, поскольку  $H_{2t}$  и  $H_{1t}$  получены проектированием векторов  $\vec{H}_{2t}$  и  $\vec{H}_{1t}$  на это направление и правая часть (4.70) и (4.71) зависит от ориентации вектора  $d\vec{l}$ . И только в том случае, когда по поверхности раздела двух сред не текут поверхностные токи, приходим к однородным соотношениям:

$$H_{2t} - H_{1t} = 0, \quad i = 0, \quad (4.72)$$

справедливым для произвольного направления  $d\vec{l}$ .

Итак, нормальные компоненты векторного поля магнитной индукции непрерывны на поверхности раздела двух сред, а касательные компоненты напряженности магнитного поля испытывают скачок, равный величине  $i_{\vec{v}}$ , определяемой в зависимости от рассматриваемого направления  $\vec{v} = \frac{\vec{n} \times d\vec{l}}{dl}$  на поверхности раздела сред.

Что касается соотношений на поверхности раздела сред для векторного поля  $\vec{M}$  намагниченности среды, то их легко получить из полученных выше, учитывая материальные уравнения среды.

[предыдущая](#) | [наверх](#) | [следующая](#)

© 2002. МГТУ им. Н.Э.Баумана | Designed by krE[]Sote

[об учебнике](#) | [содержание](#) | [поиск](#)

## ГЛАВА 5. Квазистационарные магнитные явления

### 5.1. Индуктивность

Рассмотрим тонкий замкнутый контур конечных размеров  $l$  с током  $J$ . Согласно закону Био-Савара-Лапласа каждый элемент тонкого контура с током  $J d\vec{l}$  создает в окружающем пространстве магнитное поле:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (5.1)$$

где  $\vec{r}$  - вектор, проведенный из точки расположения элемента с током в точку наблюдения. Зависимость (5.1) для упрощения выкладок записана для среды, для которой магнитная проницаемость  $\mu = \mathbf{1}$ . Напомним, что направление вектора  $d\vec{l}$  совпадает с направлением тока  $J$  вдоль контура.

Допустим, что на замкнутый контур  $l$  опирается поверхность  $S$ , к элементу площади которой  $dS$  проведена нормаль  $\vec{n}$  ( $|\vec{n}| = \mathbf{1}$ ). Зависимость (5.1) позволяет рассчитать элементарный магнитный поток через поверхность  $dS$

$$d\Phi = d\vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} \cdot dS. \quad (5.2)$$

Соотношение (5.2) можно проинтегрировать по поверхности  $S$  и вдоль контура  $l$ , используя принцип суперпозиции:

$$\Phi = \oint_l \int_S \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} \cdot dS. \quad (5.3)$$

Если рассматриваемый контур "простой", т.е. если сила тока  $J$  постоянна вдоль контура, то зависимость (5.3) приобретает вид:

$$\Phi = L \cdot J, \quad L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l \int_S \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (5.4)$$

Оказывается, что магнитный поток, пронизывающий поверхность, которая опирается на замкнутый контур с током, пропорционален силе тока, текущего вдоль контура. Коэффициент пропорциональности  $L$  между силой тока  $J$  и магнитным потоком  $\Phi$  называют индуктивностью контура или коэффициентом индуктивности контура. Выражение для индуктивности контура (5.4) можно записать в более простой форме:

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_I \frac{d\vec{l} \cdot d\vec{l}'}{r} \quad (5.5)$$

где  $d\vec{l}' \in I$ , а величина  $r$  - расстояние между элементом  $d\vec{l}$  и элементом  $d\vec{l}'$  одного и того же контура  $I$ .

Формулу (5.5) также можно получить с использованием векторного потенциала магнитного поля:

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}. \quad (5.6)$$

В предыдущей части курса была выведена формула

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_I \frac{J d\vec{l}}{r} \quad (5.7)$$

для векторного потенциала  $\vec{A}$  магнитного поля, образованного в окружающем пространстве током, который течет в замкнутом контуре  $I$ . С использованием соотношений (5.6) и (5.7) получаем:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_S \text{rot}\vec{A} \cdot \vec{n} \cdot dS = \iint_I \vec{A} \cdot d\vec{l}' = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \iint_I \frac{d\vec{l} \cdot d\vec{l}'}{r} \quad (5.8)$$

Приведенные выше рассуждения справедливы для "тонкого" контура с током. Для проводников конечного поперечного сечения вычисление коэффициента  $L$  сопряжено с определенными трудностями.

Заметим, что случай  $\mu \neq 1$  можно описать подобным образом.

Если рассмотреть два близко расположенных друг к другу контура конечных размеров  $I_1$  и  $I_2$ , по которым текут токи  $J_1$  и  $J_2$ , то легко догадаться, что магнитный поток через поверхность, натянутую на второй контур, вызванный током в первом контуре, можно записать в форме:

$$\Phi_2 = L_{21} \cdot J_1, \quad (5.9)$$

и соответственно для обратной ситуации можно получить:

$$\Phi_1 = L_{12} \cdot J_2, \quad (5.10)$$

Коэффициенты  $L_{21}$  и  $L_{12}$  называются коэффициентами взаимной индуктивности контуров  $I_1$  и  $I_2$ . Они могут быть рассчитаны по следующим формулам:

$$L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{I_1} \iint_{I_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r}, \quad (5.11)$$

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{I_2} \iint_{I_1} \frac{d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1}{r}. \quad (5.12)$$

Вывод формул (5.11) и (5.12) отличается несущественными деталями от вывода формулы (5.8).

Из формул (5.11) и (5.12) с очевидностью следует "теорема о взаимности":

$$L_{21} = L_{12} \quad (5.13)$$

Физически соотношение (5.13) эквивалентно отношению:

$$\frac{\Phi(J_1)}{J_1} = \frac{\Phi(J_2)}{J_2}. \quad (5.14)$$

Из изложенного выше ясно, что коэффициенты  $L$ ,  $L_{21}$  и  $L_{12}$  аккумулируют в себе свойства среды (если  $\mu \neq 1$ ) и зависят от геометрии контура (контуров) и выбора направлений обхода контуров.

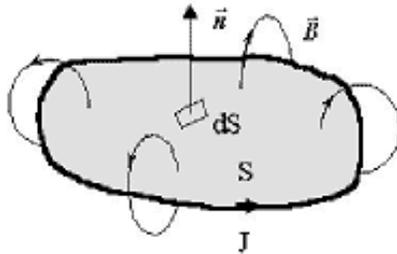


Рис. 5.1.

Вернемся к рассмотрению простого контура с током (рис. 5.1). Ток, текущий в контуре, создает в окружающем пространстве магнитное поле. Это поле обладает вполне определенной энергией. Изменение конфигурации контура сопряжено с работой против сил магнитного поля и, естественно, с изменением магнитной энергии в пространстве:

$$\begin{aligned} dW_M &= -d\vec{F}_A \cdot d\vec{l} = -J \cdot d\vec{l} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} \equiv -J \cdot \vec{B} \cdot (d\vec{l} \times d\vec{l}') = \\ &= J \vec{B} \cdot \vec{n} dS = J d\Phi. \end{aligned} \quad (5.15)$$

В цепочке выкладок (5.15)  $d\vec{F}_A$  - сила Ампера, действующая на проводник с током в магнитном поле  $\vec{B}$ ,  $d\vec{l}'$  - элемент контура, по которому течет ток.  $d\vec{l}$  - смещение элемента контура.

Произведение  $d\vec{l} \times d\vec{l}'$  представляет собой направленный элемент ометаемой поверхности,  $d\Phi$  - величина изменения магнитного потока. Если вспомнить, что из соотношения (5.4) следует

$$d\Phi = L dJ, \quad (5.16)$$

то, комбинируя результат выражения (5.15) с соотношением (5.16), получим

$$dW_M = L J dJ, \quad (5.17)$$

откуда

$$W_M = \frac{LJ^2}{2}. \quad (5.18)$$

Соотношение (5.18) позволяет дать другое определение (и метод расчета!) величины индуктивности:

$$L = \frac{2W_M}{J^2}. \quad (5.19)$$

Если учесть, что

$$W_M = \int_V \frac{\vec{B}^2}{2\mu\mu_0} dV, \quad (5.20)$$

где  $V$  - объем, в котором магнитное поле  $\vec{B}$ , вызванное током  $J$ , отлично от нуля, то соотношение (5.19) становится полностью определенным. Заметим, что соотношения (5.19) и (5.20) свободны от предположения о том, что проводник, по которому течет ток, является тонким.

Заметим, что "энергетический" подход очень наглядно демонстрирует теорему о взаимности коэффициентов индуктивности. Действительно, пусть ток  $J_1$  создает поле  $\vec{B}_1$ , а ток  $J_2$  - поле  $\vec{B}_2$ . Результирующее поле  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ . В этом случае

$$W_M = W_{M1} + W_{M2} + W_{12}, \quad (5.21)$$

где

$$W_{M1} = \int_V \frac{\vec{B}_1^2}{2\mu\mu_0} dV,$$

$$W_{M2} = \int_V \frac{\vec{B}_2^2}{2\mu\mu_0} dV,$$

$$W_{12} = \int_V \frac{\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2}{\mu\mu_0} dV.$$

По определению можно положить:

$$L_1 = \frac{2W_{M1}}{J_1^2},$$

$$L_2 = \frac{2W_{M2}}{J_2^2},$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{W_{12}}{J_1 J_2}.$$

Выше, соотношение (5.20), фактически была определена объемная плотность энергии магнитного поля. Обоснование такого определения следует из общих уравнений электродинамики (система уравнений Максвелла), которые будут рассмотрены в последующих разделах курса. Но можно было бы непосредственно вычислить индуктивность конечного участка бесконечного соленоида, по формуле (5.18) получить величину магнитной энергии и предельным переходом получить величину объемной плотности энергии магнитного поля.

[предыдущая](#) | [наверх](#) | [следующая](#)

© 2002. МГТУ им. Н.Э.Баумана | Designed by krE[Sote]

[об учебнике](#) | [содержание](#) | [поиск](#)

## ГЛАВА 5. Квазистационарные магнитные явления

### 5.2. Явление электромагнитной индукции.

В первой трети XIX века было установлено, что взаимодействие неподвижных электрических зарядов можно описать с помощью понятия "электрическое поле", а взаимодействие движущихся электрических зарядов, т.е. токов, можно описать с помощью понятия "магнитное поле". Было известно, что электрический ток действует на магнит, что магнитное поле действует на проводник с током. В 1831 г. английский ученый Майкл Фарадей сделал эпохальное открытие - он открыл явление электромагнитной индукции. Это явление состоит в том, что в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока, пронизывающего поверхность, опирающуюся на этот контур, возникает электрический ток (индукционный ток).

Сам по себе электрический ток возникнуть не может, следовательно, в описанной ситуации в контуре возникает электродвижущая сила (Э.Д.С.) индукции. В результате многочисленных опытов М. Фарадей установил, что Э.Д.С. индукции пропорциональна скорости изменения магнитного потока, пронизывающего поверхность, натянутую на контур. Выбором подходящей системы единиц можно обеспечить не только пропорциональность, но и строгое равенство упомянутых величин:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad \Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS \quad (5.22)$$

где  $S$  - поверхность, натянутая на контур. Примечательно, что изменение величины  $\Phi$  за счет изменения во времени индукции магнитного поля  $\vec{B}$ , или за счет изменения взаимной ориентации векторов  $\vec{B}$  и нормали  $\vec{n}$  или за счет изменения площади поверхности  $S$  приводит к одинаковым результатам.

Смысл закона электромагнитной индукции Фарадея (5.22) состоит в том, что переменное во времени магнитное поле  $\vec{B}$  порождает электрическое поле  $\vec{E}$ , но это означает, что они связаны друг с другом внутренним образом, а не только посредством внешних проявлений. До открытия Дж.К. Максвелла, согласно которому (в отсутствие электрического тока!) переменное электрическое поле порождает магнитное поле, было еще около 30 лет, только после этого открытия основы теории электромагнитных явлений оказались прочно установленными. Но открытие М.Фарадея было высоко оценено современниками: известный немецкий философ Ф.В Шеллинг в публичном выступлении на заседании Берлинской академии наук 28 марта 1832 г. оценил опыты Фарадея как основу для научного объединения механических, электрических, электрохимических, магнитных и гальванических явлений. Нечего говорить, какое значение имело открытие М.Фарадея для современного ему, да для современного для нас состояния науки.

В 1833 г. Э.Х.Ленц сформулировал "правило Ленца", согласно которому Э.Д.С. индукции вызывает ток такого направления, чтобы препятствовать причине его возникновения. Сегодня это правило обосновывают несколькими путями, и с помощью понятия "устойчивая термодинамическая система" (принцип Ле-Шателье-Брауна), и с помощью электромеханических методов (сила Ампера, работа по перемещению проводника с током в пространстве).

Если Э.Д.С. индукции представить в форме интеграла по замкнутому контуру от индуцированной напряженности электрического поля  $\vec{E}$ , то "правильное" соотношение для закона Фарадея приобретает форму

$$\oint_l \vec{E}_i d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS. \quad (5.23)$$

Здесь положительное направление обхода контура (ориентация элемента длины  $d\vec{l}$  контура) и направление нормали  $\vec{n}$  к элементу площади поверхности  $dS$  (и для совокупности элементов  $dS$ ) связаны между собой правилом правого винта (иначе, с конца вектора  $\vec{n}$  положительное направление обхода контура - против часовой стрелки; еще иначе, если голова человека ориентирована в пространстве по направлению  $\vec{n}$ , то положительным считается такое направление движения, при котором область, ограниченная контуром, остается слева).

В некоторых случаях закон электромагнитной индукции можно использовать в форме

$$\oint_l \vec{E}_i d\vec{l} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \oint_l (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l}, \quad (5.24)$$

где вектор  $\vec{v}$  - скорость смещения во времени элемента контура  $d\vec{l}$ . Форма (5.24) в явном виде учитывает возможность изменения геометрии или местоположения контура  $l$ , при этом частная производная от магнитного потока  $\Phi$  вычисляется при "замороженном" состоянии контура. Можно говорить, что первый член правой части закона (5.24) обусловлен скоростью изменения магнитного потока во времени, а второй - деформацией и смещением контура в "замороженном" магнитном поле.

Интересно, что соотношение (5.24) можно записать в дифференциальной (локальной) форме, если предположить, что  $\vec{v}$  - скорость частичек среды, в которую "вморожен" контур: если в (5.24)  $\vec{v}$  - определена только для точек контура, то теперь мы предполагаем, что  $\vec{v}$  определена и для точек поверхности  $S$ . В этих условиях

$$\oint_l (\vec{E}_i - \vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l} = \int_S \text{rot}(\vec{E}_i - \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{n} dS = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} \cdot dS. \quad (5.25)$$

При записи соотношения (5.25) использована математическая теорема Стокса. Из соотношения (5.25) в силу произвольности выбора поверхности  $S$  получаем:

$$\text{rot}(\vec{E}_i - \vec{v} \times \vec{B}) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (5.26)$$

где  $\vec{v}$  - вектор скорости среды. Для неподвижной среды имеем:

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (5.27)$$

- уравнение электромагнитной индукции в дифференциальной форме. Из уравнения (5.27) следует, что в переменном магнитном поле электрическое поле перестает быть потенциальным, как это понималось в электростатике.

Заметим, что выражение (5.26) может дать повод говорить о возможности введения величины  $\vec{E}' = \vec{E} - \vec{v} \times \vec{B}$ , которую можно было интерпретировать как напряженность электрического поля в движущейся системе координат. Строго говоря, это не так. В заключительной части курса будет показана степень приближенности уравнения электромагнитной индукции при переходе в другую инерциальную систему отсчета.

Вернемся к рассмотрению закона электромагнитной индукции Фарадея с учетом правила Ленца:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (5.28)$$

Вспомним, что для относительно медленных переменных процессов можно воспользоваться определением индуктивности:

$$\Phi = L \cdot J \quad (5.29)$$

Соотношение (5.28) с учетом определения (5.29) принимает вид:

$$\mathcal{E}_i = -J \frac{dL}{dt} - L \frac{dJ}{dt}. \quad (5.30)$$

Формула (5.30) записана с учетом возможного изменения величины индуктивности  $L$  в переменном процессе. Это может происходить при изменении размеров контура или его ориентации, или при изменении магнитных свойств среды. В последнем случае справедлива цепочка соотношений:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{d\mu} \frac{d\mu}{dt} = \frac{dL}{d\mu dH} \frac{d\mu dH}{dt}, \quad (5.31)$$

где  $\mu$  - магнитная проницаемость среды,  $H$  - напряженность магнитного поля.

В более простом и чаще встречающемся случае (соленоид без ферромагнитного сердечника) величина  $L$  является постоянной величиной. Соотношение (5.30) при этом принимает форму, известную из элементарного курса

$$\mathcal{E}_i = -L \frac{dJ}{dt}. \quad (5.32)$$

Э.Д.С. индукции (5.32) можно использовать при расчете переменных процессов в сложных цепях электрического тока. Предполагается, что правила Кирхгофа остаются в силе и в условиях применимости соотношения (5.32). Правило использования соотношения (5.32) состоит в следующем: Э.Д.С. индукции на участке цепи с индуктивностью  $L$  направляют по току  $J$ , направление которого предварительно задано произвольно. Сумма Э.Д.С. по замкнутому контуру включает в себя и Э.Д.С. индукции, определенную соотношением (5.32). После решения задачи выясняется истинное направление тока на рассматриваемом участке и истинное направление Э.Д.С. индукции.

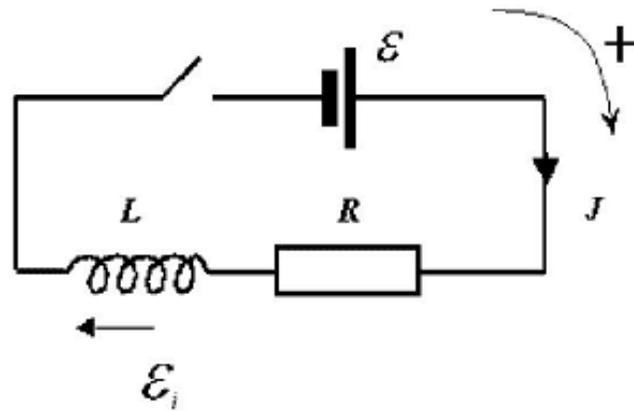


Рис. 5.2.

Рассмотрим простую электрическую схему, включающую в себя источник питания  $\mathcal{E}$ , сопротивление  $R$ , индуктивность  $L$  и ключ управления. Начальное состояние схемы - ток в цепи равен нулю. В этот момент замыкают ключ. Предполагаем, что положительное направление обхода выбрано против часовой стрелки, направление Э.Д.С. совпадает с направлением обхода, направление тока  $J$  совпадает с направлением обхода. Э.Д.С. индукции  $\mathcal{E}_i$  направляем "по току". Второе правило Кирхгофа записываем в форме:

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_i = JR. \quad (5.33)$$

Используя соотношение (5.32)

$$\mathcal{E} - L \frac{dJ}{dt} = JR, \quad (5.34)$$

перепишем уравнение (5.34) и явно запишем начальное условие:

$$\frac{dJ}{dt} + \frac{R}{L} J = \frac{\mathcal{E}}{L}, \quad J(0) = 0. \quad (5.35)$$

Решение задачи (5.35) имеет вид:

$$J = \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - \exp\left(-\frac{R}{L} t\right) \right). \quad (5.36)$$

Если ввести  $J_0 = \mathcal{E}/R$  и характерное время  $\tau = L/R$ , то решение (5.36) принимает вид:

$$\frac{J}{J_0} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5.37)$$

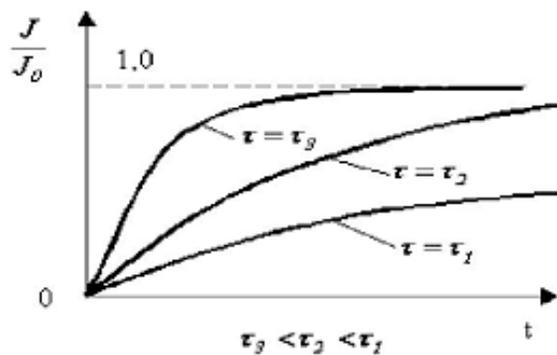


Рис. 5.3.

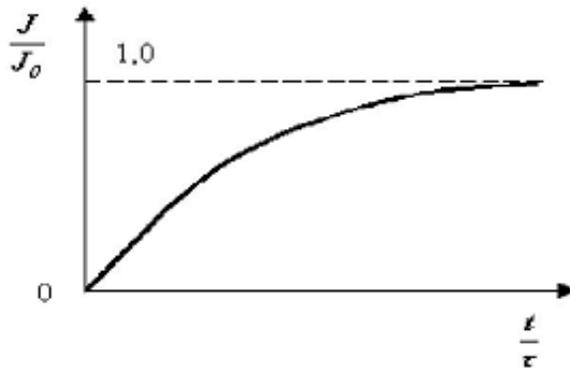


Рис. 5.4.

На рис. приведены графики зависимости (5.37) для отношения  $J/J_0$  как функции времени  $t$ . Легко видеть, что с уменьшением параметра  $\tau = L/R$  (т.е. малое  $L$  или большое  $R$ ) время установления стационарного состояния уменьшается. На рис. показана также зависимость для  $J/J_0$  как функция "безразмерного" времени  $\frac{t}{\tau}$ . Представление результатов расчета и их анализ в безразмерной форме является общепринятым приемом в современной науке.

Основной вывод из анализа соотношения (5.37): при наличии индуктивности в цепи мгновенное установление стационарного режима невозможно, время выхода на "режим" определяется параметром  $\tau$ .

В заключение рассмотрим уравнение (5.34). Умножим обе части этого уравнения на величину  $J$ :

$$\mathcal{E} J dt = L J dJ + J^2 dt. \quad (5.38)$$

Второй член правой части уравнения (5.38) представляет собой количество тепла, выделившегося в цепи по закону Джоуля-Ленца за время  $dt$ , левая часть уравнения (5.38) представляет собой работу источника тока за то же время.

Член  $L J dJ$  представляет собой приращение "магнитной" энергии в системе:

$$dW_M = L J dJ, \quad (5.39)$$

что приводит к соотношению:

$$W_M = \frac{LJ^2}{2}, \quad (5.40)$$

которое было использовано в предыдущем разделе.

Если рассматриваемая электрическая схема содержит соленоид с ферромагнетиком, то в переменном процессе необходимо учесть изменение индуктивности элемента цепи:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dJ} \cdot \frac{dJ}{dt}. \quad (5.41)$$

В этом случае уравнение второго правила Кирхгофа имеет вид:

$$\mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dJ} \cdot \frac{dJ}{dt} = JR. \quad (5.42)$$

Поскольку величина  $d\Phi/dt$  в конечном итоге определяется величиной силы тока  $J$ , то решение уравнения (5.42) с однородным начальным условием для силы тока может быть сведено к квадратуре:

$$\int_0^J \frac{d\Phi(J')}{\mathcal{E} - J'R} = t \quad (5.43)$$

По соотношению (5.43) можно рассчитать время  $t$ , необходимое для достижения величины силы тока  $J$ . Дифференциал  $d\Phi(J)$  в выражении (5.43) зависит параметрически от геометрии ферромагнитного сердечника и кривой намагничения

$$\mu = \mu(H) = \mu(H(J)). \quad (5.44)$$

Если уравнение (5.42) умножить почленно на силу тока  $J$ , то можно заключить по аналогии с анализом уравнения (5.38), что дифференциал магнитной энергии системы имеет вид:

$$dW_M = J \cdot d\Phi(J), \quad (5.45)$$

а выражение для магнитной энергии определено зависимостью:

$$W_M = \int J d\Phi(J). \quad (5.46)$$

В заключение отметим, что для достаточно быстропеременных процессов необходимо учитывать зависимость кривой намагничения от частоты.

## ГЛАВА 6. Молекулярно-кинетические представления об электромагнитных свойствах сред

### 6.1 Материальные уравнения среды

Электромагнитные свойства среды в рамках феноменологического подхода проявляются в так называемых "материальных уравнениях среды"

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (6.1)$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \kappa \vec{E}, \quad (6.2)$$

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \quad (6.3)$$

Закон Ома в дифференциальной форме (6.1) содержит в себе величину электропроводности  $\sigma$  как коэффициент пропорциональности между объемной плотностью тока  $\vec{j}$  (движение "свободных" зарядов) и напряженностью электрического поля  $\vec{E}$ .

Уравнения (6.2) и (6.3) описывают зависимость поляризованности среды  $\vec{P}$  от напряженности электрического поля  $\vec{E}$  и намагниченности среды от напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ . Величина диэлектрической восприимчивости  $\kappa$  связана с существованием электрических диполей в среде и их ориентацией во внешнем по отношению к диполью поле  $\vec{E}$ . Величина магнитной восприимчивости  $\chi$  связана с существованием магнитных диполей в среде и их ориентацией во внешнем по отношению к диполью магнитном поле  $\vec{H}$ .

Соотношения (6.2) и (6.3) объединяет то, что и  $\kappa$  и  $\chi$  обусловлены существованием "связанных" электрических зарядов, т.е. зарядов, которые не могут свободно перемещаться по физическому телу. Хотя диэлектрическая восприимчивость  $\kappa$  обусловлена "положением" связанных электрических зарядов в пространстве, а величина магнитной восприимчивости  $\chi$  обусловлена "движением" связанных электрических зарядов (молекулярные токи Ампера), из-за того, что поведение электрического диполя  $\vec{p}_e$  в электрическом поле  $\vec{E}$  во многом похоже на поведение магнитного поля  $\vec{p}_m$  в магнитном поле  $\vec{B}$ , механизмы явлений поляризации среды и намагничения среды во многих случаях оказываются схожими.

Ниже несколько более подробно рассмотрим физическую природу протекания электрического тока через вещество в рамках макроописания, особенности явления поляризации и намагничения вещества, а в заключение раздела обсудим теорию электропроводности металлов и теорию намагничения парамагнетиков на молекулярно-кинетическом уровне.



[об учебнике](#) | [содержание](#) | [поиск](#)



## ГЛАВА 6. Молекулярно-кинетические представления об электромагнитных свойствах сред

### 6.2 Природа электрического тока в веществе

Условно все вещества в природе делят на проводники и диэлектрики (изоляторы). Слово "диэлектрик" придумал М.Фарадей: "диа" - по-гречески "через", а "electric" - по-английски "электрический". Термин возник из-за того, что металлы (хорошие проводники электрического тока) хорошо экранируют электростатическое поле, а диэлектрики - это вещества, через которые электростатическое поле "проходит". Электрическое удельное сопротивление металлов лежит в пределах  $10^{-6}$  -  $10^{-4}$  Ом\*см, в то время как у типичных диэлектриков удельное сопротивление  $\sim 10^8$  -  $10^{17}$  Ом\*см. Существует и промежуточный класс веществ - так называемые полупроводники.

Физическое различие между проводником и диэлектриком состоит в различии меры проявления свойств проводимости и свойств поляризуемости вещества.

Из элементарной молекулярно-кинетической теории следует, что объемная плотность тока  $\vec{j}$  представляет собой плотность потока электрического заряда:

$$\vec{j} = \rho_e \cdot \vec{v} = qn\vec{v}, \quad (6.4)$$

где  $q$  - заряд единичного носителя заряда,  $n$  - объемная концентрация носителей заряда,  $\vec{v}$  - средняя скорость направленного движения носителей заряда. Зависимость (6.4) легко обобщается на случай носителей заряда нескольких типов

$$\vec{j} = \sum_i q_i n_i \vec{v}_i. \quad (6.5)$$

У различных проводников (и полупроводников, и, строго говоря, у диэлектриков) различны носители заряда, способные перемещаться по физическому объему, величины объемных концентраций и скорости направленного движения. Удобно, вспоминая дифференциальную форму закона Ома, ввести понятие "подвижность носителей заряда", как это сделал Поль Ланжевен в самом начале прошлого века:

$$\vec{v}_i = \mu \vec{E}, \quad (6.6)$$

где формально величина  $\mu$  - это скорость направленного движения носителей заряда сорта  $i$  при действии на них поля  $\vec{E}$  с величиной 1 В/м. Заметим, что по зависимости (6.6) величина  $\mu < 0$  для отрицательных зарядов. Иногда удобно пользоваться соотношением

$$\sigma = \sum_i n_i \mu_i q_i, \quad (6.7)$$

где комбинация  $\mu_i q_i > 0$  для всех случаев. Использование формулы (6.7) позволяет не принимать во внимание (где это возможно) знак заряда носителей заряда.

Металлы. В металлах плотность тока проводимости создается электронами. Электрон как элементарная частица был открыт в 1897 г. Дж.Дж.Томсоном. Прямое определение заряда электрона было произведено в опытах Р.Милликена, он оказался по современной совокупности экспериментальных данных равным

$$e = -1,602189 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.} \quad (6.8)$$

В опытах Рикке (Карл Виктор Эдуард) (1845 - 1915) и в опытах Толмена-Стюарта (идея Л.И. Мандельштама и Н.Д.Попалекси) получено убедительное доказательство того, что именно электроны своим движением обуславливают электрический ток. Полученное в этих опытах отношение  $e/m$  позволило оценить массу электрона, эта величина оказалась равной:

$$m_e = 0,911 \cdot 10^{-30} \text{ кг,} \quad (6.9)$$

что примерно в 2000 раз меньше массы атома водорода. Для металла характерно, что величина объемной концентрации носителей заряда  $n$  практически не зависит от температуры, а величина подвижности  $|\mu|$  уменьшается с ростом температуры, иначе: удельное сопротивление  $\rho = \frac{1}{\sigma}$  для металлов растет с повышением температуры. Для металлов также характерно то, что для существования электрона в куске металла как "свободного" заряда (электрона проводимости) не требуется энергия активации.

Более детальное обсуждение молекулярно-кинетических представлений о закономерностях протекания тока в металлах проведено в последующих частях настоящего раздела.

### Твердые полупроводники.

В полупроводниках носителями заряда являются электроны и положительно заряженные "дырки" - квазичастицы, движение которых является следствием коллективных движений электронов. Дырка, как квазичастица, обладает эффективной массой и подвижностью, которые зависят от кристаллической структуры полупроводника. Для того чтобы электрон из обычного "связанного" состояния перешел в состояние "электрон проводимости" и при этом образовалась еще и дырка, необходима энергия активации. Энергия активации составляет 0,1 - 1,5 эВ. Напомним, что энергетическая мера теплового движения молекулы составляет при комнатной температуре величину  $\sim 4 \cdot 10^{-2}$  эВ. Поэтому с ростом температуры объемная концентрация носителей заряда в полупроводниках растет, и растет быстрее, чем уменьшается подвижность. Выражение для электропроводности беспримесного полупроводника имеет вид:

$$\sigma = e \cdot (n\mu_n + p\mu_p) = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E_a}{kT}}, \quad (6.10)$$

где  $n$  - объемная концентрация электронов проводимости,  $p$  - объемная концентрация дырок,  $\mu_n$  и  $\mu_p$  подвижность электронов проводимости и дырок, соответственно,  $\Delta E_a$  - энергия активации,  $k$  - коэффициент Больцмана,  $T$  - абсолютная температура. Значения  $n$  и  $p$  взаимосвязаны между собой посредством условия электрической нейтральности полупроводника в целом и тем обстоятельством, что существование связанного электрона и существование дырки как квазичастицы - это взаимоисключающие события в вероятностном описании полупроводника.

Легко видеть, что температурный коэффициент электропроводности полупроводника имеет положительную величину:

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dT} = \frac{\Delta E_d}{kT^2} > 0. \quad (6.11)$$

Подробнее с электрическими явлениями в полупроводниках, в том числе и легированных, можно ознакомиться в разделе курса "Квантовая физика твердого тела".

### Электролиты.

Главным свойством растворов электролитов, что позволяет отличить такие растворы от растворов чистых компонентов, является их свойство проводить электрический ток. При растворении в полярном растворителе (типичный представитель - обыкновенная вода) вещества типа хлористого водорода, и в особенности кристаллические вещества типа соли NaCl диссоциируют на вполне устойчивые ионы с положительным и отрицательным электрическими зарядами. В растворе при этом выполняется условие электрической нейтральности.

Электрический ток в электролитах обусловлен движением положительных ионов (катионов) и отрицательных ионов (анионов) в растворе.

Если диссоциация растворенного вещества и рекомбинация ионов обратимы, то к ним применимы известные законы химического равновесия. В.Освальд рассматривал растворы, в которых каждое из растворенных веществ подчиняется идеальным осмотическим законам. Для каждого из растворенных веществ справедливо соотношение:

$$\mu = \mu^0 + kT \ln C, \quad (6.12)$$

где  $\mu$  - химический потенциал растворенного вещества при концентрации  $C$  молей на литр,  $\mu^0$  - химический потенциал при  $C=1$ , он зависит от температуры, давления и вида растворителя, но не от состава раствора.

В случае одно-одновалентного электролита  $AB$ , диссоциирующего по уравнению  $AB \rightleftharpoons A^+ + B^-$ , условие равновесия сводится к уравнению:

$$\mu_{AB} = \mu_{A^+} + \mu_{B^-} \quad (6.13)$$

Если в уравнение (6.13) подставить соотношение (6.12), то после несложных преобразований легко получить:

$$\frac{C_{A^+} \cdot C_{B^-}}{C_{AB}} = e^{-\frac{\mu_{A^+}^0 + \mu_{B^-}^0 - \mu_{AB}^0}{kT}} = K(P, T). \quad (6.14)$$

Здесь  $C_{A^+}$  - концентрация положительных ионов в растворе,  $C_{B^-}$  - концентрация отрицательных ионов в растворе,  $C_{AB}$  - концентрация исходных молекул (не распавшихся, нейтральных) растворенного вещества в растворе. Выражение

$$\mathcal{E}_d = \mu_{A^+}^0 + \mu_{B^-}^0 - \mu_{AB}^0 \quad (6.15)$$

можно интерпретировать как "теплоту диссоциации", еще раз заметим, что  $\mathcal{E}_d$  сильно зависит от

свойств растворителя: с ростом величины диэлектрической проницаемости среды  $\epsilon$  - величина  $\epsilon_d$  заметно падает.

Введем в рассмотрение величину "степень диссоциации" как долю молекул, которые распались на ионы. Следствием такого определения являются соотношения:

$$C_{AB} = C(1 - \alpha); \quad C_{A^+} = C_{B^-} = \alpha \cdot C, \quad (6.16)$$

где  $C$  - концентрация растворенного вещества в растворе. Используя зависимость (6.16) в выражении (6.14), получим:

$$K = C \frac{\alpha^2}{1 - \alpha} \quad (6.17)$$

- закон действующих масс, где  $K$  - константа химического равновесия. Уравнение (6.17) служит для расчета степени диссоциации электролита в зависимости от концентрации раствора и природы растворителя, температуры и давления в системе. Если величина степени диссоциации известна, то рассчитывать объемные концентрации положительных и отрицательных ионов труда не представляет.

Для того, чтобы воспользоваться соотношением (6.5), необходимо уметь оценить скорости движения ионов в растворе. В рамках элементарных представлений полагают, что в установившемся процессе средняя скорость  $\vec{u}$  движения ионов определенного типа может быть найдена из уравнения баланса сил, действующих на отдельный ион:

$$\vec{E} \cdot q = C \cdot \vec{u} \quad (6.18)$$

где  $\vec{E}$  - напряженность электрического поля,  $q$  - заряд иона,  $C$  - некоторая постоянная.

Если в качестве закона сопротивления использовать закон Стокса (движение шарика в вязкой среде при малых значениях скорости), то:

$$\vec{u} = \frac{q}{6\pi\eta r} \cdot \vec{E}, \quad \mu = \frac{q}{6\pi\eta r}. \quad (6.19)$$

В формулах (6.19)  $\eta$  - коэффициент динамической вязкости среды,  $r$  - эффективный (условный!) радиус иона,  $\mu$  - значение подвижности иона в данном растворе.

Более подробно вопросы протекания электрического тока в электролитах освещены в руководствах по физической химии и электрохимии.

### Газы и плазма.

В обычных условиях газы состоят из нейтральных атомов или (и) молекул, такие газы практически не проводят электрический ток. Под действием космического излучения и по ряду других причин (ударная ионизация, фотоионизация, тепловая ионизация и др.) в газах могут существовать отдельно электроны, положительные ионы и отрицательные ионы.

При этом в газе возникают носители заряда, а их направленное движение и является электрическим током. Различают при этом "электронный ток" и "ионный ток". Интересно отметить, что термодинамические свойства совокупности электронов могут быть различны (речь идет, в частности, о таком параметре состояния, как температура). Ниже рассмотрим явление термической ионизации газа.

Если рассматривать газ как совершенный (идеальный) газ, то можно предположить, что распределение молекул газа по скоростям определяется формулой Максвелла:

$$dn = n_0 f(v) \cdot 4\pi v^2 dv, \quad (6.20)$$

где  $dn$  - количество молекул, скорости которых лежат в пределах от  $v$  до  $v+dv$ ,  $n_0$  общее число молекул в единице объема,

$$f(v) = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}. \quad (6.21)$$

Доля молекул, обладающих энергией, которая превышает величину  $\epsilon_a$ , определяется соотношением:

$$\frac{n_a}{n} = \int_{\epsilon_a}^{\infty} f(v) \cdot 4\pi v^2 dv \approx e^{-\frac{\epsilon_a}{kT}}. \quad (6.22)$$

Если газ состоит из многоатомных молекул, для "развала" которых на отдельные атомы необходима энергия  $\epsilon_a$ , то с повышением температуры, когда будет выполнено условие

$kT_a \gg \epsilon_a$ , газ будет существовать в форме атомов. Если для ионизации атома необходима

энергия  $\epsilon_a$ , то для полной ионизации газа необходима температура  $T_a \gg \frac{\epsilon_a}{k}$ . Например, для

атома водорода энергия ионизации составляет величину 13,6 эВ, что приводит к оценке  $T_a > 157000$  К.

Потенциал ионизации атомов цезия 3,86 эВ, для этого случая  $T_a > 44600$  К. Понятно, что доля молекул газа при комнатной температуре ( $T \approx 300$  К), способных произвести ионизацию вещества ничтожно мала. В астрофизике и теории взрыва приходится рассматривать вещество в состоянии плазмы - т.е. в состоянии частично и полностью ионизованном.

Степень ионизации газа численно равна отношению числа имеющихся в газе заряженных частиц одного знака к сумме нейтральных и заряженных частиц данного знака:

$$\alpha = \frac{N}{N_0 + N}, \quad (6.23)$$

$N$  - число заряженных (отрицательных) частиц,  $N_0$  число нейтральных частиц в единице объема.

Давление частично ионизированного газа в случае малой объемной плотности газа (пренебрегаем кулоновским взаимодействием частиц) можно вычислить по формуле:

$$p = (N_0 + 2N)kT = (N_0 + N)(1 + \alpha)kT \quad (6.24)$$

Соображения, схожие по подходу при рассмотрении диссоциации электролитов, приводят к формуле Саха для расчета степени ионизации газа:

$$\alpha = \left\{ 1 + \frac{p}{T^{5/2}} \left[ \frac{m_i m_e}{2\pi \hbar^2 (m_i + m_e)} \right]^{3/2} e^{-\frac{\epsilon_0}{kT}} \right\}^{-1/2}. \quad (6.25)$$

здесь  $m_i$  - масса иона,  $m_e$  - масса электрона,  $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}$  Дж·с - постоянная Планка,  $p$  - давление,  $T$  - абсолютная температура.

При выводе формулы Саха было использовано предположение об электронейтральности вещества, о термодинамическом равновесии между атомами, ионами и электронами, о малом влиянии кулоновского взаимодействия между заряженными частицами. В реальных условиях температуры ионов и электронов могут сильно различаться.

[предыдущая](#) | [наверх](#) | [следующая](#)

© 2002. МГТУ им. Н.Э.Баумана | Designed by krE[Sote]

[об учебнике](#) | [содержание](#) | [поиск](#)

## ГЛАВА 6. Молекулярно-кинетические представления об электромагнитных свойствах сред

### 6.3. Магнетики

Все тела, внесенные в магнитное поле, намагничиваются в той или иной степени, создавая собственное магнитное поле, которое накладывается на внешнее магнитное поле. Степень намагничивания тела зависит от молекулярной структуры и формы тела. Ниже речь будет идти о влиянии молекулярной структуры на свойства магнетиков.

В предыдущих разделах курса было показано, что элементарный магнитный диполь с магнитным моментом  $\vec{p}_m$  во внешнем относительно его поле  $\vec{B}$  испытывает действие момента сил, стремящихся развернуть магнитный диполь вдоль внешнего поля  $\vec{B}$ . Там же было замечено, что при со направленной ориентации магнитного диполя  $\vec{p}_m$  и магнитного поля  $\vec{B}$  собственное поле диполя (внутри контура с элементарным током) усиливает внешне поле. Однако действие внешнего поля  $\vec{B}$  на диполь  $\vec{p}_m$  этим не исчерпывается.

Диполь  $\vec{p}_m$  - прецессирует вокруг силовой линии магнитного поля  $\vec{B}$  с ларморовской частотой

$$\vec{\omega}' = \frac{|e|}{2m} \vec{B}, \quad (6.26)$$

где  $|e|$  абсолютная величина заряда электрона,  $m$  - его масса,  $\vec{B}$  - индукция внешнего поля,  $\vec{\omega}'$  - вектор мгновенной угловой скорости прецессии. Прецессия магнитного диполя приводит к появлению дополнительного орбитального тока:

$$\Delta I = e \frac{\omega'}{2\pi} \quad (6.27)$$

и соответствующего ему наведенного орбитального момента:

$$\Delta \vec{p}_m = -\frac{e^2 S_{\perp}}{4\pi m} \cdot \vec{B} \quad (6.28)$$

По направлению вектор  $\Delta \vec{p}_m$  противоположен вектору  $\vec{B}$ , последнее означает, что дополнительное собственное наведенное магнитное поле внутри контура с током уменьшает (ослабляет) действие внешнего поля  $\vec{B}$  (в формуле (6.28)  $S_{\perp}$  - площадь проекции орбиты электрона в круговом движении на плоскость, перпендикулярную внешнему магнитному полю).

Положение дел сильно усложняется еще и тем обстоятельством, что у электрона помимо орбитального момента количества движения имеется собственный ("спиновый") момент количества движения и собственный ("спиновый") магнитный момент. Упомянутые величины связаны между

собой соответствующим гиромангнитным отношением, которое оказалось вдвое больше, чем гиромангнитное отношение орбитальных моментов. Изучение этих особенностей движения электронов в элементарных молекулярных токах - предмет квантовой механики.

Для нас пока важно то, что существуют вещества, у которых превалируют эффекты, связанные с первичной ориентацией магнитных диполей, это вещества с положительной магнитной восприимчивостью ( $\chi > 0$ ). Если величина  $\chi$  - достаточно мала, но положительна, то такое вещество называют парамагнетиком.

В природе имеют место и вещества, магнитные свойства которых обусловлены вторичными эффектами намагничивания, связанными с процессией электронов вокруг силовой линии. У этих веществ величина магнитной восприимчивости  $\chi$  является малой отрицательной величиной, эти вещества называют диамагнетиками.

Магнитные диполи в веществе при определенных условиях могут образовывать более или менее упорядоченную структуру (спонтанное намагничение) в отсутствие внешнего магнитного поля. У таких веществ величина  $\chi$  достигает достаточно больших значений, зависимость

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi(H)) \cdot \vec{H} \quad (6.29)$$

приходится считать нелинейной, для таких веществ характерно наличие "петли гистерезиса". Физически это означает, что зависимость (6.29) имеет различный вид при намагничивании тела и при размагничивании последнего. Явление спонтанной самоорганизации системы магнитных диполей проявляется при температурах, лежащих ниже так называемой точки Кюри. Описанные вещества, как правило, металлы, называется ферромагнетиками. Помимо ферромагнетиков существуют ферриты. Ферриты по магнитным свойствам схожи с ферромагнетиками, а по электрическим свойствам с полупроводниками: если у ферромагнетиков электропроводность падает с ростом температуры (как у металлов!), то у ферритов электропроводность растет с ростом температуры (как у полупроводников!). Абсолютные значения электропроводности ферритов достаточно малы, магнитная проницаемость велика. Эти свойства ферритов широко используются в высокочастотной радиотехнике.

Современные теоретические модели, описывающие магнитные свойства вещества, основаны в основном на квантомеханических представлениях. Познакомиться с ними можно по монографии С.В. Вонсовского "Магнетизм". :М. - 1971.

В [разделе 6.5](#) рассмотрена классическая теория П. Ланжевена намагничивания парамагнетиков, ее результаты не потеряли своего практического значения до сегодняшнего дня.

[предыдущая](#) | [наверх](#) | [следующая](#)

© 2002. МГТУ им. Н.Э.Баумана | Designed by krE[S]ote

[об учебнике](#) | [содержание](#) | [поиск](#)

## ГЛАВА 6. Молекулярно-кинетические представления об электромагнитных свойствах сред

### 6.4. Классическая теория электропроводности металлов Друде

Почти сто лет тому назад П.Друде разработал теорию электро- и теплопроводности металлов. В теории Друде валентные электроны металла рассматривались как классический "электронный" газ (идеальный газ из электронов). Применение к этой модели основных положений элементарной молекулярно-кинетической теории привело к поразительным результатам. На основе этих представлений оказалось возможным объяснить закон Видемана-Франца, объяснить эффект Холла, возникновение контактной разности потенциалов, явление термоэлектронной эмиссии. Для всех перечисленных явлений удалось получить количественные зависимости между величинами, определяющими то или иное явление. Теория Друде не свободна от внутренних противоречий. Современная физика твердого тела базируется на представлениях квантовой механики, а для описания свойств электронного газа используется квантовая статистика, отличная от статистики Максвелла - Больцмана. Вместе с тем теория Друде не потеряла своей полезности: отдельные ее результаты поражают своей точностью, а методы теории Друде на редкость физически наглядны.

В рамках элементарной кинетической теории полагаем, что валентные электроны (электроны проводимости) металлов представляют собой одинаковые твердые сферы, двигаются они по прямым линиям до столкновения друг с другом, время контакта частиц пренебрежимо мало по сравнению с временем "свободного" движения.

Объемную концентрацию электронов проводимости можно оценить выражением:

$$n_e = \rho_M \cdot \frac{ZN_a}{A}, \quad (6.30)$$

где  $\rho_M$  - объемная плотность металла (кг/м<sup>3</sup>),  $Z$  - валентность химического элемента,  $N_a$  - число Авогадро,  $A$  - относительная атомная масса элемента.

Заряд электрона  $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, масса электрона  $m_e = 0,91 \cdot 10^{-30}$  кг. Величину "e" ниже будем считать положительной, а знак заряда электрона будем учитывать непосредственно в формулах.

Плотность электронного газа:

$$\rho_e = m_e n_e \quad (6.31)$$

значительно больше плотности обычных газов при нормальных условиях.

В теории Друде пренебрегают сильным электрон-электронным и электрон-ионным взаимодействием, полагая, что внутри металлического тела отдельный электрон практически ведет себя как свободная частица. Это дает нам право считать электрон "нейтральной" частицей при расчете взаимодействия ее с остальными частицами, но способной переносить заряд при расчете параметров электрического тока.

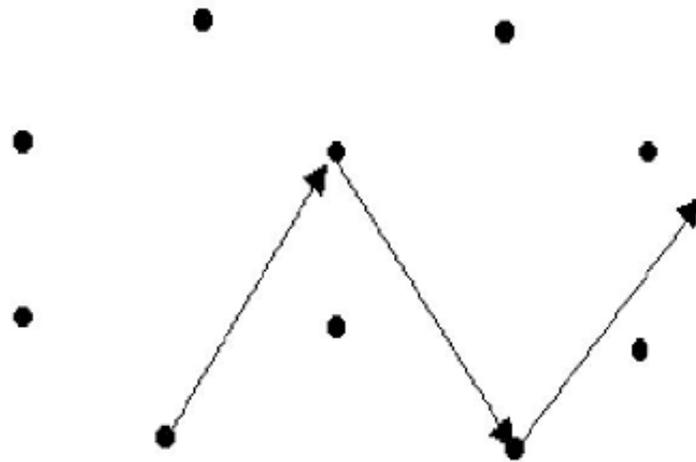


Рис. 6.1.

П.Друде полагал, что электроны в своем движении сталкиваются с атомами (ионами) кристаллической структуры металла (столкновения электрон-электрон значительно менее вероятны). Картина последовательных соударений электрона с атомами кристаллической решетки показана на рис. 6.1.

Современная теория оценивает вероятность такого механизма не очень высоко: рассеяние электронов имеет и другие механизмы. Поэтому не следует наглядную картину рис.6.1 понимать в буквальном смысле.

Будем считать, что отношение

$$dp = \frac{dt}{\tau} \quad (6.32)$$

представляет собой вероятность соударения электрона с рассеивающим центром, где  $dt$  - промежуток времени,  $\tau$  - время релаксации или время свободного пробега. Предполагается, что величина  $\tau$  не зависит от пространственного положения электрона и не меняется от соударения к соударению. Предполагается также, что электроны находятся в состоянии теплового равновесия со своим окружением. Механизм соударения детализируется следующим образом: скорость электрона после соударения статистически не связана со скоростью электрона до соударения (электрон "забыл" свою предысторию), направление скорости после соударения - случайное, хаотическое, а ее величина соответствует той температуре, которая имеет место в окрестности точки соударения.

#### 6.4.1. Закон Ома. Закон Джоуля-Ленца.

Итак, рассмотрим закон Ома для однородного участка цепи в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (6.33)$$

$\sigma$  - электропроводность,  $\rho$  - удельное электрическое сопротивление среды,  $\vec{j}$  - объемная плотность тока,  $\vec{E}$  - напряженность электрического поля. Вспомним, что величина  $\vec{j}$  - плотность потока электрического заряда

$$\vec{j} = \rho_{\text{э}} \langle \vec{v} \rangle, \quad \rho_{\text{э}} = -n_e e, \quad (6.34)$$

где  $\langle \vec{v} \rangle$  - вектор средней скорости направленного движения носителей заряда, в рассматриваемом случае - электронов. В отсутствие напряженности электрического поля  $\vec{E}$  величина  $\langle \vec{v} \rangle$  обращается в нуль (хотя хаотическое тепловое движение электронов продолжает иметь место). Для случая  $\vec{E} \neq \vec{0}$  величина  $\langle \vec{v} \rangle \neq \vec{0}$  и направлена противоположно полю. Эту скорость можно рассчитать следующим образом. Пусть  $t$  - время, прошедшее с момента последнего соударения электрона с рассеивающим центром. Мгновенная скорость  $\vec{v}$  электрона в момент времени  $t$  равна:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 - \frac{e\vec{E} \cdot t}{m_e} \quad (6.35)$$

Из-за "хаотичности" начальной скорости  $\vec{v}_0$  ее вклад в среднюю скорость частицы равен нулю, поэтому можно записать:

$$\langle \vec{v} \rangle = -\frac{e\vec{E} \cdot \tau}{2m_e}, \quad (6.36)$$

поскольку среднее время движения электрона между соударениями равно  $\tau = \langle t \rangle$ . В этом случае получим:

$$\sigma = \frac{ne^2 \tau}{2m_e}. \quad (6.37)$$

Заметим, что по Ланжевону из соотношения (6.36) следует выражение для "подвижности" электронов проводимости в металле:

$$\langle \vec{v} \rangle = \mu_e \vec{E} \Rightarrow \mu_e = -\frac{e\tau}{2m_e} \quad (6.38)$$

Если по экспериментальным данным для  $\rho = \frac{1}{\sigma}$  оценить величину  $\tau$ , она оказывается величиной порядка  $10^{-14}$  -  $10^{-15}$  с. Оценить длину свободного пробега можно соотношением

$$l = v_0 \cdot \tau \quad (6.39)$$

а значение  $v_0$  можно получить из классического закона распределения энергии по степеням свободы

$$\frac{m_e v_0^2}{2} = \frac{3}{2} kT, \quad (6.40)$$

где  $k$  - постоянная Больцмана,  $T$  - абсолютная температура металла. Из зависимости (6.40) при комнатной температуре получаем  $v_0 \approx 10^5$  м/с, а  $l \approx 1 \div 10 \text{ \AA}$ .

Значение величины  $l$  удивительно совпало с возможными значениями межатомных расстояний... Вроде бы теория Друде "правильно" описала механизм рассеяния электронов... На самом деле картина рассеяния имеет более сложную природу. И эксперимент не свидетельствует в пользу теории Друде: при достаточно низких температурах на тщательно приготовленных образцах можно получить  $l \approx 10^{-2} \text{ м}$ , т.е.  $10^8$  межатомных расстояний.

Итак, если бы мы знали  $\tau$ , то зависимость (6.37) решала бы проблему расчета величины  $\sigma$ . Более того, результаты теории Друде, не содержащие время релаксации  $\tau$ , оказываются количественно верными.

Теория Друде объясняет физическую природу закона Джоуля-Ленца следующим образом. При каждом "соударении" с рассеивающим центром электрон передает этому центру энергию

$$\frac{mv^2(\tau)}{2} = \frac{e^2 \tau^2}{2m_e} \cdot E^2.$$

За единицу времени происходит  $\frac{1}{\tau}$  таких соударений. А если учесть, что в единице объема содержится  $n$  электронов, то получим, в единице объема кристаллической решетки металла за единицу времени выделяется энергия, равная

$$q = \frac{ne^2 \tau}{2m_e} \cdot E^2 = \sigma E^2.$$

Полученное соотношение обосновывает дифференциальную форму закона Джоуля-Ленца.

#### 6.4.2. Эффект Холла.

Для наших целей наибольший интерес представляют два случая: расчет электропроводности при наличии пространственно-однородного постоянного магнитного поля (эффект Холла) и при наличии пространственного однородного, но переменного во времени электрического поля.

Перед началом рассмотрения этих случаев обсудим уравнение второго закона Ньютона для среднего значения импульса электрона

$$\frac{d\langle \vec{p} \rangle}{dt} = -\frac{\langle \vec{p}(\tau) \rangle}{\tau} + \langle \vec{f}(t) \rangle. \quad (6.41)$$

Смысл уравнения (6.41) состоит в следующем. В равновесных условиях величина  $\langle \vec{p} \rangle$  равна нулю (это основное условие хаотичности движения электронов), величина  $\langle \vec{f}(t) \rangle$  - осредненная внешняя сила, действующая на электрон. Величина  $\langle \vec{p} \rangle \neq \vec{0}$  является количественной мерой отклонения системы от состояния равновесия. Каждая устойчивая система стремится к состоянию равновесия со скоростью, пропорциональной (в нулевом приближении) величине этого отклонения. Таким образом, уравнение (6.41) представляет собой типичное уравнение релаксационного процесса.

Пусть по проводнику вдоль оси  $x$  течет ток  $j_x$  при наличии магнитного поля  $\vec{B} = \{0, 0, B\}$ , т.е. направленного вдоль оси  $z$ . Под действием силы Лоренца, действующей на каждую заряженную частицу, возникают компоненты напряженности электрического поля  $E_y$  и плотности  $j_y$ . Уравнение (6.41) для движения электронов в металле принимает вид

$$\frac{d\langle \vec{p} \rangle}{dt} = -\frac{\langle \vec{p}(\tau) \rangle}{\tau} - e \left( \vec{E} + \frac{\langle \vec{p} \rangle}{m} \times \vec{B} \right). \quad (6.42)$$

Для установившегося режима средний импульс электрона не зависит от времени, поэтому:

$$0 = -eE_x - \omega_c p_y - \frac{p_x}{\tau} \quad (6.43)$$

$$0 = -eE_y + \omega_c p_x - \frac{p_y}{\tau}, \quad (6.44)$$

где

$$\omega_c = \frac{eB}{m} \quad (6.45)$$

Умножая уравнения (6.43) и (6.44) на выражение  $-ne\tau/m$  и учитывая определение плотности тока

$$\vec{j} = -ne \frac{\langle \vec{p} \rangle}{m}, \quad (6.46)$$

получаем

$$\sigma_\theta E_x = \omega_c \tau j_y + j_x \quad (6.47)$$

$$\sigma_\theta E_y = \omega_c \tau j_x + j_y, \quad (6.48)$$

где  $\sigma_\theta = \frac{ne^2\tau}{m}$ .

Поле Холла  $E_y$  определяется условием  $j_y=0$ . Из уравнения (6.48) при этом следует:

$$E_y = -\frac{\omega_c}{\sigma_\theta} j_x = -\left( \frac{eB}{m} \tau \frac{m}{ne^2\tau} \right) j_x.$$

Следовательно, для коэффициента Холла

$$R_B = \frac{E_y}{j_x B_z} = -\frac{1}{ne} \quad (6.49)$$

результат (6.49) примечателен тем, что коэффициент Холла не зависит ни от каких параметров металла, кроме объемной плотности носителей заряда. Для многих металлов соотношение (6.49) имеет экспериментальное подтверждение, хотя в отдельных случаях расхождение довольно значительное.

### 6.4.3. Высокочастотная электропроводность металлов.

Если в металле существует переменное электрическое поле  $\vec{E} = \vec{E}(t)$ , возникновением при этом магнитного поля пренебрегаем, то уравнение движения электрона проводимости "в среднем" (6.41) приобретает вид

$$\frac{d\langle \vec{p} \rangle}{dt} = -\frac{\langle \vec{p}(\tau) \rangle}{\tau} - e\vec{E}. \quad (6.50)$$

Произвольное поле  $\vec{E}(t)$  можно представить себе как суперпозицию отдельных гармонических колебаний вида  $A_{\omega} e^{i\omega t}$ , поэтому представляет интерес исследовать решения уравнения (6.50) при условии

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (6.51)$$

Если рассматривать процесс установившихся колебаний

$$\langle \vec{p} \rangle = \langle \vec{p}_0 \rangle e^{i\omega t}. \quad (6.52)$$

то необходимо выполнить условие

$$i\omega \langle \vec{p}_0 \rangle = -\frac{1}{\tau} \langle \vec{p}_0 \rangle - e\vec{E}_0. \quad (6.53)$$

Решением уравнения (6.53) является выражение

$$\langle \vec{p}_0 \rangle = -\frac{e\tau}{1+i\omega\tau} \vec{E}_0 \quad (6.54)$$

Выражение (6.54) позволяет записать дифференциальную форму закона Ома в виде

$$\vec{j}(\omega) = \frac{ne^2\tau}{m_e(1+i\omega\tau)} \vec{E}(\omega, t) = \sigma(\omega) \vec{E} \quad (6.55)$$

Из уравнения (6.55) формально следует

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{(1+i\omega\tau)}, \quad (6.56)$$

где  $\sigma(\omega)$  - комплексная величина, зависящая не только от свойств вещества (параметры), но и от параметра внешнего воздействия.

Перепишем соотношение (6.56) в эквивалентной форме:

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \cdot e^{-i\varphi}, \quad (6.57)$$

где  $\varphi = \arctg(\omega\tau)$ . В этом случае соотношение (6.55) приобретает вид:

$$\vec{f}(\omega) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \vec{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - \varphi)}, \quad (6.58)$$

Вспоминая предположение (6.51), замечаем, что ток отстает по фазе от фазы колебаний напряженности поля на угол  $\varphi$ , а модуль величины  $\sigma(\omega)$  оказывается зависящим от частоты колебаний вектора  $\vec{E}$ . Очевидные следствия из соотношения (6.58): при  $\omega \rightarrow 0$  величина  $\sigma(\omega) \rightarrow \sigma_0$ , т.е. к своему статическому значению; при  $\omega^2 \rightarrow \infty$  величина  $\sigma(\omega) \rightarrow 0$ , быстропеременное поле  $\vec{E}$  "не успевает" разогнать электроны, обладающие свойством инерции.

#### 6.4.4. Высокочастотная диэлектрическая проницаемость металлов.

Воспользуемся соотношением (6.54) для среднего импульса электрона в гармоническом поле с напряженностью  $\vec{E}$

$$\langle \vec{p} \rangle = -\frac{e\tau}{1 + i\omega\tau} \vec{E}. \quad (6.59)$$

Если вспомнить, что

$$\langle \vec{p} \rangle = m \langle \dot{\vec{r}} \rangle = mi\omega \langle \vec{r} \rangle, \quad (6.60)$$

то легко получить:

$$\langle \vec{p}_e \rangle = -e \langle \vec{r} \rangle = -\frac{e \langle \vec{p} \rangle}{mi\omega}, \quad (6.61)$$

последнее позволяет рассчитать вектор поляризации среды:

$$\vec{P} = n \langle \vec{p}_e \rangle = -\frac{ne}{mi\omega} \left( -\frac{e\tau}{1 + i\omega\tau} \right) \vec{E} = \frac{\sigma_0 \tau}{i\omega\tau(1 + i\omega\tau)} \cdot \vec{E}. \quad (6.62)$$

Но величина  $\vec{P}$  и величина  $\vec{E}$  феноменологически связаны между собой:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \mathbf{K} \vec{E}, \quad (6.63)$$

где  $\mathbf{K}$  - диэлектрическая восприимчивость среды:

$$\mathbf{K} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\sigma_0 \tau}{i\omega\tau(1 + i\omega\tau)}. \quad (6.64)$$

То обстоятельство, что величина  $\mathbf{K}$  по выражению (6.64) оказалась комплексной, свидетельствует о том, что фазы колебаний вектора  $\vec{E}$  и вектора  $\vec{P}$  не совпадают между собой.

Из зависимости (6.64) легко получить выражение для диэлектрической проницаемости среды:

$$\varepsilon = 1 + \kappa = 1 + \frac{\sigma_0 \tau}{\varepsilon_0 i \omega (1 + i \omega \tau)} \quad (6.65)$$

Допустим, что выполнено условие

$$\omega \tau \gg 1. \quad (6.66)$$

Выражение (6.65) при этом упрощается:

$$\varepsilon \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (6.67)$$

где,  $\omega_p^2 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \tau}$  - частота плазменных колебаний.

Соотношение (6.67) выявляет очень интересный эффект: при  $\omega < \omega_p$  величина  $\varepsilon < 0$ , волны с такой частотой в металле затухают, говорят, что металл "непрозрачен" для таких волн; при  $\omega > \omega_p$  величина  $\varepsilon > 0$  и металл становится "прозрачным". Наличие  $\omega_{\text{Порог}} = \omega_p$  хорошо подтверждается экспериментом.

[предыдущая](#) | [наверх](#) | [следующая](#)

© 2002. МГТУ им. Н.Э.Баумана | Designed by krE[Sote]

[об учебнике](#) | [содержание](#) | [поиск](#)

## ГЛАВА 6. Молекулярно-кинетические представления об электромагнитных свойствах сред

### 6.5 Намагничивание парамагнетиков и поляризация диэлектриков внешним полем

В предыдущих разделах показано, что электрический диполь с моментом  $\vec{p}_e$  в электрическом поле с напряженностью  $\vec{E}$  и магнитный диполь с моментом  $\vec{p}_m$  в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  ведут себя удивительно одинаково. Это дает нам возможность рассмотреть явление поляризации диэлектриков в электрическом поле и намагничивание парамагнетиков в магнитном поле с единых позиций. Более того, почти простой заменой обозначений в получаемых ниже формулах можно перейти от одного случая к другому. Для определенности будем делать выкладки для случая намагничивания, тем более, что исторически рассматриваемая ниже теоретическая модель намагничивания парамагнетиков была построена П.Ланжевром на несколько лет раньше аналогичной модели П.Дебая для диэлектриков, состоящих из жестких электрических диполей.

Рассмотрим безграничную однородную среду, заполненную магнитными диполями с магнитными моментами  $\vec{p}_m$  (т.е. элементарными контурами с током по гипотезе Ампера). Допустим, что модуль величины  $\vec{p}_m$  не может измениться ( $p_m^2 = const$ ). Допустим, что объемная концентрация магнитных диполей равна  $n$ . В физически бесконечно малом объеме пространства  $dV$  содержится  $dN_s = ndV$  магнитных диполей. Полагаем, что объемная концентрация магнитных диполей достаточно мала, чтобы можно было пренебречь влиянием диполей друг на друга. Полагаем также, что под действием температуры в отсутствие внешнего силового поля распределения магнитных диполей  $\vec{p}_i$ ,  $i$  - номер диполя, входящего в объем  $dV$ , является хаотичным. Интуитивный физический смысл этого утверждения очевиден. Облечем его в строгую математическую форму. Пусть элемент объема  $dV$ , а значит совокупность магнитных диполей  $dN_s$ , находится в начале сферической системы координат  $\{r, \theta, \varphi\}$ . Элемент площади поверхности сферы, описываемой уравнением  $r = const$ , имеет вид:  $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ . Телесный угол, в пределах которого описанный элемент площади виден из начала координат, имеет вид:

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (6.68)$$

Будем считать, что распределение дипольных магнитных моментов в элементе объема хаотично, если выполнено условие:

$$\frac{dN_1}{dN_2} = \frac{d\Omega_1}{d\Omega_2}, \quad (6.69)$$

где  $dN_i$  - число магнитных диполей с магнитным моментом, с ориентацией внутри элемента

телесного угла  $d\Omega_1$ ,  $dN_2$  - число магнитных диполей с магнитным моментом с ориентацией внутри элемента телесного угла  $d\Omega_2$ .

Смысл определения (6.69) сводится к посылке: чем больше телесный угол, тем больше и число магнитных диполей имеют направление в пределах этого угла.

Замкнутая (полная) сфера видна под углом  $4\pi$  стерадиан, а полное число рассматриваемых частиц при этом  $dN_\Sigma$ . С учетом сказанного из соотношения (6.69) можно получить:

$$dN_{\theta,\varphi} = dN_\Sigma \frac{\sin\theta d\theta d\varphi}{4\pi}, \quad (6.70)$$

где  $dN_{\theta,\varphi}$  - число дипольных магнитных моментов, направление которых лежит в пределах от  $\theta$  до  $\theta + d\theta$  и от  $\varphi$  до  $\varphi + d\varphi$ .

Ниже нас будут интересовать физические ситуации с осевой симметрией. В этих условиях соотношение (6.70) можно проинтегрировать по переменной  $\varphi$  в пределах от  $0$  до  $2\pi$ :

$$dN_\theta = dN_\Sigma \cdot \frac{1}{2} \sin\theta d\theta, \quad (6.71)$$

Напомним, что здесь  $\theta$  - угол между осью Z и радиусом - вектором точки поверхности сферы.

Если  $p_m$  - модуль магнитного момента отдельной частицы,  $\theta$  - значение описанного выше угла, то проекция вектора  $\vec{p}_m$  на направление Z имеет вид  $p_{mZ} = p_m \cdot \cos\theta$ . По правилу вычисления средней величины получим:

$$\langle p_{mZ} \rangle = \frac{\int p_m \cos\theta dN_\theta}{\int dN_\theta} = p_m \frac{\int_0^\pi \cos\theta \sin\theta d\theta}{2} = 0. \quad (6.72)$$

Поскольку направление оси Z можно выбрать произвольно, то можно сказать, что для любого направления величина  $\langle p_{mZ} \rangle = 0$ . Поскольку,

$$\vec{P}_Z \equiv n \langle p_{mZ} \rangle, \quad (6.73)$$

то из соотношения (6.72) следует, что хаотическое распределение векторов магнитных моментов в элементе объема  $dV$  не приводит к намагничению среды.

Теперь допустим, что ось Z выбрана по направлению внешнего магнитного поля  $\vec{B}$ . Теперь каждый магнитный диполь испытывает со стороны внешнего магнитного поля  $\vec{B}$  воздействие, результатом которого является уменьшение угла между направлением магнитного момента диполя  $\vec{p}_m$  и направлением магнитной индукции  $\vec{B}$ . Энергетической мерой этого воздействия является величина  $U = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$ . Тепловое движение системы магнитных диполей направлено на усиление хаотичности распределения магнитных диполей по направлению. Энергетической мерой теплового воздействия является величина  $kT$ , где  $k$  - коэффициент Больцмана,  $T$  - абсолютная температура среды.

В рассматриваемой ситуации вместо условия (6.69) в соответствии с принципом Больцмана

должно иметь место соотношение:

$$\frac{dN_1}{dN_2} = \frac{e^{-U_1/kT} d\Omega_1}{e^{-U_2/kT} d\Omega_2}, \quad (6.74)$$

где  $U_1, U_2$  - значения потенциальной функции системы в первом и во втором состоянии соответственно.

Из соотношения (6.74) следует:

$$dN_\theta = dN_\Sigma \frac{e^{-U/kT} \sin\theta d\theta}{\int_0^\pi e^{-U/kT} \sin\theta d\theta}, \quad (6.75)$$

Соотношение (6.75) получено с использованием очевидной нормировки:  $\int dN_\theta = dN_\Sigma$ .

Вычисление величины  $\langle p_{mz} \rangle$  с учетом соотношения (6.75) приводит к выражению:

$$\langle p_{mz} \rangle = \frac{\int_0^{\pi} p_m \cdot \cos\theta \cdot e^{-\frac{p_m B \cos\alpha}{kT}} \sin\theta d\theta}{\int_0^{\pi} e^{-\frac{p_m B \cos\alpha}{kT}} \sin\theta d\theta} = p_m \cdot f(\alpha), \quad (6.76)$$

$$f(\alpha) = \text{cth}\alpha - \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{p_m B}{kT}.$$

здесь  $f(\alpha)$  - функция Ланжевена, график которой показан на рис.6.2

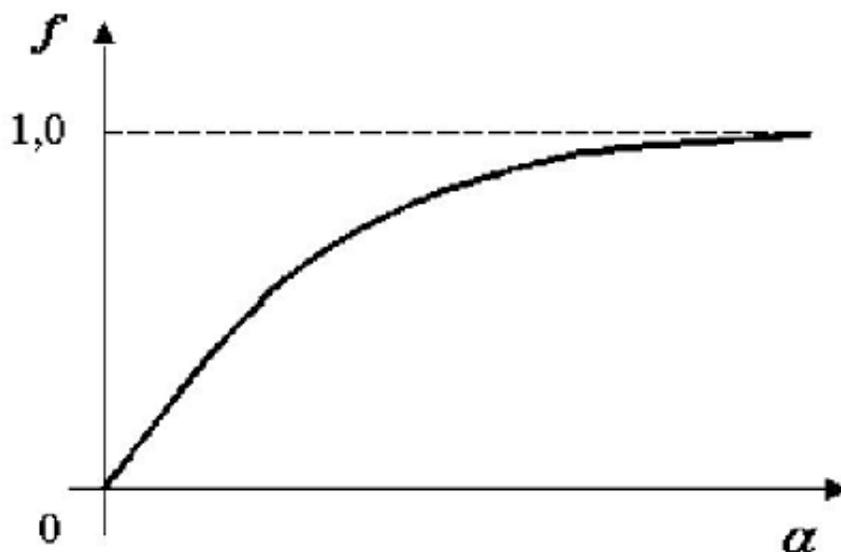


Рис. 6.2.

Легко проверить, что при малых значениях параметра  $\alpha$  (малые значения индукции внешнего поля, или большие значения температуры среды)

$$f(\alpha) \approx \frac{\alpha}{3}, \quad \alpha \ll 1. \quad (6.77)$$

При больших значениях параметра  $\alpha$  имеем:

$$f(\alpha) \approx 1 - \frac{1}{\alpha} + 2e^{-2\alpha}, \quad \alpha \gg 1. \quad (6.78)$$

Проекция  $\langle p_{mz} \rangle$  по выражению (6.76) является единственной отличной от нуля проекцией  $\langle \vec{p}_m \rangle$ , направление которого совпадает с направлением индукции магнитного поля  $\vec{B}$ . Суммарный магнитный момент элемента объема  $dV$  определен выражением:

$$d\vec{p}_{m\Sigma} = \langle \vec{p}_m \rangle \cdot \vec{n} \cdot dV.$$

В этом случае вектор намагниченности принимает вид:

$$\vec{M} = \vec{n} \cdot \langle \vec{p}_m \rangle = np_m f(\alpha) \cdot \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} \quad (6.79)$$

Традиционно вектор  $\vec{M}$  намагниченности считают функцией вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ . В этом случае:

$$\vec{M} = np_m f(\alpha) \cdot \frac{\vec{H}}{|\vec{H}|} = \chi \vec{H} \quad (6.80)$$

где  $\chi$  - магнитная восприимчивость среды. Для величины  $\chi$  можно получить:

$$\chi = \mu_0 \frac{np_m^2}{kT} \cdot \frac{f(\alpha)}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{\mu_0 p_m H}{kT}. \quad (6.81)$$

Заметим, что зависимость  $\chi = \chi(H)$  в общем случае не линейна. Для малых значений параметра  $\alpha$  (формула (6.77)) имеем:

$$\chi = \mu_0 \frac{np_m^2}{3kT}, \quad (6.82)$$

что можно записать в форме закона Кюри:

$$\chi = \frac{C}{T}, \quad C = \frac{\mu_0 np_m^2}{3k}, \quad (6.83)$$

где  $C$  - постоянная Кюри.

Легко видеть, что магнитная восприимчивость среды определяется объемной концентрацией диполей, величиной их магнитного момента и абсолютной температурой. В "сильных" полях (или при

"низких" температурах) величина  $\chi$  нелинейным образом зависит от безразмерного параметра  $\alpha$ , т. е. от величины напряженности магнитного поля.

Формула (6.80) удачно описывает явление насыщения. Вектор  $\vec{M}$  остается ограниченным по величине при бесконечно большом увеличении индукции внешнего магнитного поля  $\vec{B}$ , или напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ .

Для вектора поляризованности среды  $\vec{P}$ , очевидно, можно получить:

$$\vec{P} = np_e \cdot f(\alpha) \cdot \frac{\vec{E}}{|\vec{E}|} = \epsilon_0 \kappa \vec{E}, \quad (6.85)$$

где  $\kappa$  - диэлектрическая восприимчивость среды:

$$\kappa = \frac{np_e^2}{\epsilon_0 kT} \cdot \frac{f(\alpha)}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{p_e \vec{E}}{kT}, \quad (6.86)$$

со всеми вытекающими последствиями. Заметим, что соотношение (6.85) справедливо для среды электрических диполей, для которых  $\vec{p}_e^2 = const$ : случай "атомной" поляризации здесь не рассматривается.

В проведенном выше анализе было принято, что отдельные диполи в рассматриваемом физически бесконечно малом объеме не взаимодействуют между собой. В общем случае это взаимодействие имеет место и сводится к появлению в среде "собственного" поля, которое накладывается на "внешнее" поле. Последнее обстоятельство принуждает нас рассматривать поведение отдельного диполя, электрического или магнитного, в некотором "эффективном" поле.

Существуют методы расчета упомянутого эффективного поля, в частности, метод "самосогласованного" поля Хартри-Фока, и метод пробной частицы. Обсуждение этих методов является предметом специального исследования.

Ниже рассмотрим одну простую модель среды с учетом взаимодействия диполей между собой. Положим, что "собственное" магнитное поле как результат взаимного влияния диполей друг на друга пропорционально величине намагничивания среды

$$\vec{H}_s = \gamma \vec{M}, \quad (6.88)$$

где  $\gamma$  - некоторая безразмерная постоянная, не зависящая от величины  $\vec{M}$  величина. Ее численное значение по оценке Лоренца равно  $\frac{4\pi}{3}$ . Экспериментальные значения для разных материалов различны и могут достигать очень больших значений (заметим, что в случае электрического поля размерность величины  $\gamma$  в системе СИ совпадает с размерностью величины  $\epsilon_0$ , т.е. Ф(м<sup>-1</sup>). Более детальный анализ должен был бы учитывать то обстоятельство, что величины  $\vec{H}_s$  и  $\vec{M}$  не обязательно должны совпадать по направлению, в этом случае величина  $\gamma$  в зависимости (6.88) являлась бы тензором второго ранга. Ниже величину  $\gamma$  будем считать скалярной величиной.

Проведенные выше выкладки по расчету величины  $M$ , очевидно, остаются справедливыми при переходе от внешнего поля  $H$  к эффективному полю  $H + \gamma M$ . Соотношение (6.80) при этом можно переписать в виде формулы Ланжевена-Вейсса:

$$m = f(\alpha + \beta m), \quad (6.89)$$

где  $m = \frac{M}{n p_m}$  - безразмерная величина намагничивания среды,  $\alpha$  - безразмерный параметр,

определенный соотношением (6.81),  $\beta = \gamma \cdot \frac{\mu_0 n p_m^2}{kT}$  - безразмерный параметр, пропорциональный

величине  $\gamma$ , следовательно, учитывающий влияние "собственного" поля магнитный диполей на эффект намагничивания среды. Интересно отметить, что вместо формулы (6.80) для расчета величины намагничивания с использованием функции Ланжевена теперь приходится рассматривать уравнение (6.89) для нахождения величины  $m$ , следовательно, и величины намагничивания среды  $M$ .

Случай 1. Допустим, что выполняется условие  $\beta m \ll \alpha$ , т.е.  $H_S$  много меньше  $H$ . В этом случае правую часть соотношения (6.89) можно разложить в ряд Тейлора в окрестности величины  $\alpha$  и ограничиться членами нулевого и первого порядка малости:

$$m = f(\alpha) + f'(\alpha) \cdot \beta m.$$

Решением полученного уравнения является выражение:

$$m = \frac{f(\alpha)}{1 - f'(\alpha) \cdot \beta}. \quad (6.90)$$

Зависимость  $f'(\alpha)$  положительно определена для всех  $\alpha$ , из выражения (6.90) получается, что слабое взаимодействие диполей между собой приводит к увеличению намагниченности.

Случай 2. Если выполнено условие  $\alpha + \beta m \ll 1$  (т.е. и внешнее и собственное магнитные поля "малы"), то можно воспользоваться асимптотическим выражением (6.77) и получить

$$m = \frac{\alpha}{3 - \beta}. \quad (6.91)$$

Случай 3. Допустим, что внешнее поле в среде отсутствует:  $\alpha = 0$ . В этом случае уравнение (6.89) можно переписать в форме:

$$\frac{x}{\beta} = f(x), \quad x = m \cdot \beta. \quad (6.92)$$

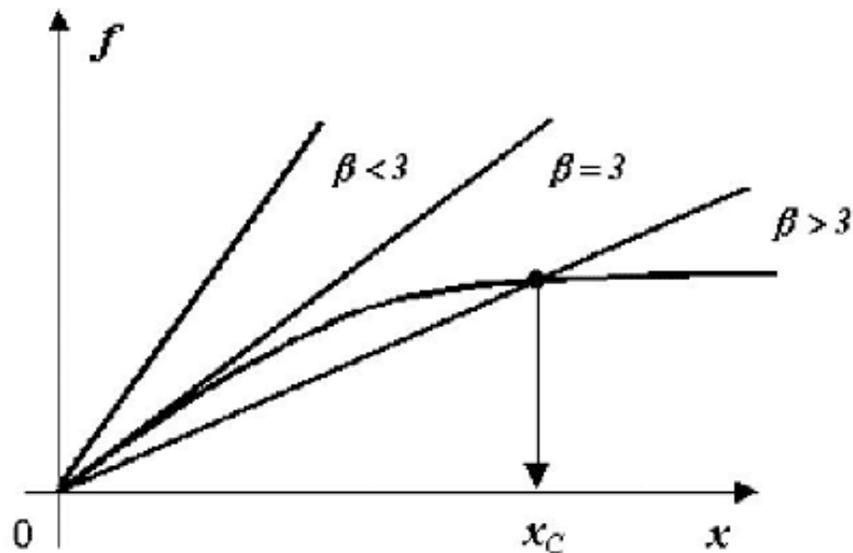


Рис. 6.3.

Тривиальное решение уравнения (6.92)  $x=0$  физически возможно, но не очень интересно. Интересно то, что при значениях параметра  $\beta > 3$  существует отличное от нуля значение переменной  $x$  как корень уравнения (6.92). Последнее соответствует возможности состояния "спонтанной" намагниченности среды. Заметим, что увеличение намагниченности среды приводит к уменьшению потенциальной функции системы магнитных диполей, поэтому состояние с ненулевой намагниченностью предпочтительнее, чем отсутствие таковой. Из этих соображений следует, что состояние  $m=0$  при  $\beta > 3$  можно было бы рассматривать как метастабильное.

При значениях параметра  $\beta = 3$  или  $\beta < 3$  величина намагниченности среды может иметь только нулевое значение (это определяется свойствами функции Ланжевена).

Вернемся к случаю 2 и соотношению (6.91) в частности. Если в условиях применимости соотношения (6.91) записать выражение для магнитной восприимчивости среды

$$\chi = \frac{C}{T \left( 1 - \frac{\beta}{3} \right)},$$

где  $C$  - постоянная Кюри (соотношение (6.83)), то приходим к формуле закона Кюри-Вейсса:

$$\chi = \frac{C}{T - T_C}, \quad T_C = \frac{\mu_0 \gamma \cdot n \mu_m^2}{3k}. \quad (6.93)$$

Здесь  $T_C$  - температура "точка Кюри". Спонтанная намагниченность среды может существовать только при температуре, меньшей, чем точка Кюри. Экспериментальное значение точки Кюри для железа составляет около 1000 К, что соответствует значению  $\gamma \approx 10000$ .

В заключение настоящего раздела, скажем, что модель Ланжевена (для диэлектриков - модель Дебая) и закон Кюри описывают эффекты намагничивания парамагнетиков, модель Ланжевена-Вейсса и закон Кюри-Вейсса описывают намагничивание ферромагнетиков, антиферромагнетики как среды можно в первом приближении описать как ферромагнетики, у которых температура Кюри (точка Кюри) отрицательна. За более подробным описанием необходимо обратиться к более специальным руководствам.



## ГЛАВА 7. Система уравнений максвелла как основа классической электродинамики

### 7.1. Дифференциальная и интегральная формы системы уравнений Максвелла. Физическое содержание теории Максвелла

В основе современной классической электродинамики лежит система уравнений Максвелла. Дифференциальная форма системы уравнений Максвелла в системе единиц СИ имеет вид:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (7.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (7.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (7.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (7.4)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (7.5)$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad (7.6)$$

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стоп}}) \quad (7.7)$$

Уравнениям (7.1)- (7.4) соответствуют интегральные формы записи:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_s \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS, \quad (7.1')$$

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \mathcal{I} + \frac{\partial}{\partial t} \int_s \vec{D} \cdot \vec{n} \, dS, \quad (7.2')$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = Q, \quad (7.3')$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0, \quad (7.4')$$

где  $Q$  - величина свободного заряда в объеме, охватываемом замкнутой поверхностью  $S$ , а величина "сила тока"  $\mathfrak{I}$  определена соотношением

$$\mathfrak{I} = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS. \quad (7.8)$$

Обратим внимание читателя на то обстоятельство, что выбор положительного направления обхода контуров  $l$  в левых частях уравнений (7.1') и (7.2') согласован с выбором направления нормали  $\vec{n}$  к элементу  $dS$  поверхности  $S$  в поверхностных интегралах правой части упомянутых уравнений: обход контура должен производиться против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора  $\vec{n}$ . Иначе, если тело человека ориентировано по вектору  $\vec{n}$ , то двигаться вдоль контура надо так, чтобы область внутри контура оставалась слева.

В уравнениях (7.3') и (7.4') используется внешняя нормаль по отношению к объему, ограниченному рассматриваемой замкнутой поверхностью.

В определении (7.8) направление нормали  $\vec{n}$  в поверхностном интеграле задает положительное направление, с учетом которого определяется алгебраическая величина силы тока  $\mathfrak{I}$ .

Интегральная форма записи уравнения (7.7) представляет собой хорошо известный из элементарного курса физики закон Ома:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varepsilon_{12} - \mathfrak{I}R. \quad (7.7')$$

Уравнение (7.7') записано для неразветвленного участка цепи, который содержит ЭДС (электродвижущую силу)  $\varepsilon_{12}$ , имеет сопротивление  $R$ , ток по которому течет от сечения 1 к сечению 2,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  - потенциалы электрического поля для рассматриваемых сечений. В отсутствие ЭДС из уравнения (7.7') следует уравнение закона Ома в форме

$$\mathfrak{I} = \frac{U}{R},$$

где  $U = -(\varphi_2 - \varphi_1)$  - напряжение между граничными сечениями участка цепи.

Наиболее последовательное представление о природе электромагнитного поля состоит в том, что система уравнений Максвелла принимается как постулат, как теоретическое обобщение всех известных экспериментальных законов электромагнетизма, как то целое, из которого как частные случаи следуют отдельные физические закономерности.

Значимость системы уравнений Максвелла для электродинамики можно сравнить со значимостью законов Ньютона для механики и открытием закона всемирного тяготения.

В чем принципиальная новизна представлений Максвелла о природе электромагнитного поля? Явление электромагнитной индукции было описано законом электромагнитной индукции Фарадея и правилом Ленца:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad \Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS. \quad (7.9)$$

Внешне оно похоже на уравнение (7.1) системы уравнений Максвелла. Но М. Фарадей и Э.Х. Ленц рассматривали явление электромагнитной индукции как явление в электропроводящем контуре. Д.К. Максвелл постулировал, что циркуляция напряженности электрического поля по замкнутому контуру возникает всегда, когда меняется величина потока магнитной индукции через поверхность, натянутую на этот контур, безотносительно к тому, возникает ли в контуре электрический ток под действием электродвижущей силы индукции.

Особенно наглядно проявляется новизна представлений Максвелла о природе электромагнетизма в записи уравнения (7.1). В переменном векторном поле  $\vec{B}$  частная производная по времени от вектора  $\vec{B}$  не равна нулю. Это означает, что переменное векторное поле  $\vec{E}$ , в отличие от электростатики, становится вихревым, оно перестает быть потенциальным! (Не надо думать, что для переменного электромагнитного поля нельзя ввести понятие потенциала, но силовые характеристики  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  описываются при этом совокупностью скалярного потенциала  $\Phi$ , переменного во времени, и векторного потенциала  $\vec{A}$ , тоже переменного во времени. Работа по перемещению точечного заряда по замкнутому контуру в этих условиях может оказаться не равной нулю).

В магнитостатике (электрические токи не меняют своей величины и направления, в рассматриваемой системе не накапливаются электрические заряды) известно уравнение

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} \quad (7.10)$$

и его интегральный аналог - теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \mathcal{I}, \quad (7.11)$$

где  $\mathcal{I}$  - сила тока, пронизывающая произвольную поверхность, натянутую на рассматриваемый замкнутый контур.

Использование уравнения (7.11) затруднено при анализе процесса зарядки-разрядки конденсатора: на замкнутый контур  $l$ , расположенный в пространстве между обкладками конденсатора, можно натянуть поверхность, которая целиком находится между обкладками, ток проводимости через нее не течет. Вторая возможность - поверхность охватывает одну из обкладок конденсатора, через нее течет сила тока проводимости  $\mathcal{I}$ .

В соответствии с уравнением (7.11) мы должны получить различные значения циркуляции поля  $\vec{H}$  по рассматриваемому замкнутому контуру. Такая неоднозначность противоречит физическому принципу, согласно которому физическая величина должна определяться независимо от метода расчета.

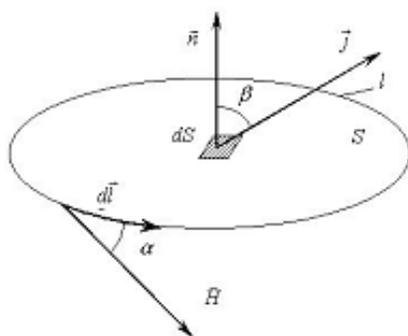


Рис. 7.1.

К вопросу о циркуляции вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру

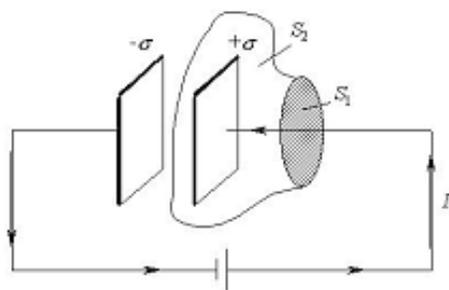


Рис. 7.2.

"Парадокс" применения теоремы о циркуляции вектора  $\vec{H}$  по замкнутому контуру ( $\mathcal{I}_{S_1} \neq \mathcal{I}_{S_2}$ )

Максвелл ввел в уравнение (7.11) дополнительный "ток смещения"

$$\mathcal{I}_{\text{см}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} \cdot \vec{n} \, dS \quad (7.12)$$

и постулировал "закон полного тока" в форме (7.2). Все противоречия при описании рассматриваемой выше физической ситуации оказались снятыми.

При выяснении физического смысла уравнения (7.2) оказывается, что в отсутствие объемной плотности тока проводимости  $\vec{j}$  магнитное поле может быть порождено переменным электрическим полем, это магнитное поле оказывается вихревым.

Рассматривая уравнения (7.1) и (7.2) совместно, замечаем, что переменное поле  $\vec{E}$  порождает вихревое поле  $\vec{H}$ , а переменное поле  $\vec{E}$  порождает вихревое поле  $\vec{H}$ . Гениальность открытия Максвелла состоит в выявлении этой "симметрии" взаимодействия электрического и магнитного полей как единого электромагнитного поля.

Заметим также, что знакомые нам из предыдущих разделов курса уравнения (7.3) и (7.4) и соответствующие им уравнения (7.3') и (7.4') также подверглись переосмыслению. Вспомним, что

уравнение (7.3) в электростатике являлось следствием закона Кулона в полевой формулировке.

Точечный заряд  $q$ , который создавал вокруг себя электрическое поле, при этом покоился. Тот факт, что уравнение (7.3) остается справедливым и в системе координат, относительно которой этот заряд движется и не обязательно с постоянной скоростью, является далеко не тривиальным.

В технических ВУЗах России принято при изложении курса электромагнетизма как раздела общего курса физики придерживаться истории развития учения об электромагнитных явлениях. Изложение на основе принятия как исходного постулата системы уравнений Максвелла (от общего к частному) требует значительно меньше дополнительных предположений, чем при традиционном варианте изложения предмета.

[предыдущая](#) | [наверх](#) | [следующая](#)

© 2002. МГТУ им. Н.Э.Баумана | Designed by krE[Sote]

[об учебнике](#) | [содержание](#) | [поиск](#)

## ГЛАВА 7. Система уравнений максвелла как основа классической электродинамики

### *7.2. Основные свойства системы уравнений Максвелла.*

1. Система уравнений Максвелла "замкнута", то есть число неизвестных функций равно числу уравнений в системе.

2. Система уравнений Максвелла "конструктивна". В математическом анализе доказано, что одновременное задание ротора и дивергенции векторного поля позволяет это поле рассчитать (при выполнении определенных граничных условий). Уравнения (7.1)- (7.4) как раз и задают роторы и дивергенции электрического и магнитного полей, причем ротор электрического поля связан со скоростью изменения магнитного поля, а ротор магнитного поля - со скоростью изменения электрического поля.

3. Система уравнений Максвелла обладает свойством инвариантности относительно преобразований Лоренца (основа современной теории относительности). Классическая механика Ньютона этим свойством не обладает.

4. Система уравнений Максвелла удивительно "симметрична" относительно электрических и магнитных величин. Это свойство особенно наглядно проявляется в непроводящей среде в отсутствие объемной плотности свободных электрических зарядов.

[предыдущая](#) | [наверх](#) | [следующая](#)

© 2002. МГТУ им. Н.Э.Баумана | Designed by krE[ ]Sote

## ГЛАВА 7. Система уравнений максвелла как основа классической электродинамики

### 7.3. Основные следствия системы уравнений Максвелла

В настоящем курсе нет возможности рассмотреть все следствия системы уравнений Максвелла, поэтому ниже ограничимся рассмотрением закона сохранения электрического заряда, закона сохранения электромагнитной энергии (теорема Пойтинга) и обсудим некоторые особенности явления распространения электромагнитных волн.

#### 7.3.1. Закон сохранения электрического заряда.

Закон сохранения электрического заряда неявно содержится в системе уравнений Максвелла. Действительно, вычислим величину дивергенции от правой и левой частей уравнения (7.2)

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div} \vec{j} + \operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

В векторном анализе известен результат (его можно проверить непосредственным вычислением!)

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0, \quad \forall \vec{A}.$$

Поскольку операция вычисления дивергенции сводится к дифференцированию по пространственным координатам, то порядок вычисления частной производной по времени и вычисления дивергенции можно поменять местами, а если при этом воспользоваться уравнением (7.3), то получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j} \quad (7.13)$$

- закон сохранения электрического заряда в дифференциальной форме (дивергентная форма). Интегральная форма этого закона имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV = - \oint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (7.14)$$

или в более привычной форме записи

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -I. \quad (7.15)$$

Физический смысл полученных интегральных соотношений: в фиксированном объеме величина электрического заряда может измениться только при наличии тока (т.е. движения электрических зарядов) через замкнутую поверхность, ограничивающую этот объем. Закон сохранения электрического заряда в дивергентной форме не содержит объемной плотности источников заряда.

Отсюда следует, что в классической электродинамике электрический заряд не может возникнуть и не может исчезнуть.

### 7.3.2. Теорема Пойтинга.

Теорема Пойтинга описывает закономерности изменения во времени энергии электромагнитного поля, связанные с излучением энергии в окружающее пространство, диссипацией (джоулево тепло) и мощностью внешних сил.

Если уравнение (7.1) скалярно умножить на вектор  $\vec{H}$ , а уравнение (7.2) скалярно умножить на вектор  $\vec{E}$  и из первого уравнения вычесть второе, получим:

$$\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} = -\vec{j} \vec{E} - \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (7.16)$$

Непосредственным вычислением можно проверить, что

$$\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}). \quad (7.17)$$

Если электрические характеристики среды постоянны во времени ( $\varepsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ), то

$$\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{H} \vec{B}}{2} + \frac{\vec{E} \vec{D}}{2} \right). \quad (7.18)$$

Используя полученные результаты, приходим к соотношению:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{E} \vec{D}}{2} + \frac{\vec{H} \vec{B}}{2} \right) = -\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{j} \vec{E}. \quad (7.19)$$

В левой части соотношения (7.19) стоит частная производная по времени от суммы объемных плотностей энергии электрического поля  $\frac{\vec{E} \vec{D}}{2}$  (с этой величиной мы встречались в электростатике) и

магнитного поля  $\frac{\vec{H} \vec{B}}{2}$  (с этой величиной мы встречались в магнитостатике), а в правой части -

типичный для дифференциальных законов сохранения дивергентный член и объемная плотность "источника" электромагнитной энергии. Для сравнения напомним, что уравнение сохранения электрического заряда не содержало объемной плотности источника зарядов.

Векторное произведение  $\vec{E} \times \vec{H}$  играет роль плотности потока энергии с размерностью Вт/м<sup>2</sup>. Его обозначают специальным символом  $\vec{S}$  и называют вектором Умова-Пойтинга (в зарубежной литературе - вектор Пойтинга). Заметим, что в уравнении баланса энергии электромагнитного поля вектор Умова-Пойтинга появляется только под знаком дивергенции. Это говорит о том, что физический смысл следует приписать выражению  $\operatorname{div} \vec{S}$ , не вектору  $\vec{S}$  непосредственно. Интерпретация величины потока вектора  $\vec{S}$  через незамкнутую поверхность всегда требует осторожности.

С использованием уравнения (7.7) источниковый член в соотношении (7.19) можно переписать в форме

$$\vec{j} \vec{E} = \sigma \vec{E}^2 + \sigma \vec{E} \vec{E}_{\text{стор}}, \quad (7.20)$$

где первый член правой части - существенно положительная величина, а знак второго члена правой части зависит от взаимной ориентации векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{E}_{\text{стор}}$ . Первый член представляет собой объемную плотность джоулевых потерь, то есть объемную плотность мощности разогрева среды (Вт/м<sup>3</sup>). Вторым членом - это объемная плотность мощности сторонних сил, с этим членом связана возможность либо получения энергии единицей объема среды, либо совершения работы над окружающей средой.

В интегральной форме соотношение (7.19) имеет вид:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \oint_S \vec{S} \cdot \vec{n} dS - \dot{Q}_{\text{джк}} - N_{\text{стор}}, \quad (7.21)$$

где  $W$  - энергия электромагнитного поля в фиксированном объеме,  $\dot{Q}_{\text{джк}}$  - мощность джоулева тепловыделения,  $N_{\text{стор}}$  - мощность сторонних сил. Часто о соотношении (7.21) говорят не как о балансовом соотношении, а как о законе сохранения энергии.

### 7.3.3. Электромагнитные волны.

Система уравнений Максвелла допускает существование переменного электромагнитного поля в пространстве, свободном от электрических зарядов, в форме электромагнитных волн. Уравнения (7.1) и (7.2) для рассматриваемого случая имеют вид:

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (7.22)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (7.23)$$

Вычислим, например, ротор от обеих частей уравнения (7.22):

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H}. \quad (7.24)$$

Из векторного анализа известно, что

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E}, \quad (7.25)$$

оператор Лапласа  $\Delta$  в выражении (7.25) применяется к каждой компоненте векторного поля  $\vec{E}$ .

Из уравнения (7.3) исходной системы уравнений Максвелла для рассматриваемого случая имеем

$$\text{div } \vec{E} = 0, \quad (7.26)$$

что с учетом уравнения (7.23) позволяет получить

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{E}. \quad (7.27)$$

В одномерном случае из уравнения (7.27) следует

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} \quad (7.28)$$

(для каждой компоненты вектора  $\vec{E}$ ).

Сравнивая уравнение (7.28) с уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (7.29)$$

описывающим распространение бегущей волны с фазовой скоростью  $v$  вдоль оси  $x$ , находим, что

а) каждая из компонент вектора  $\vec{E}$  описывается волновым уравнением, т. е. представляет собой волну, бегущую вдоль оси  $x$ ;

б) фазовая скорость этой волны равна

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c, \quad (7.30)$$

$c$  - скорость света (здесь использованы теоретические значения электрической и магнитной постоянных).

Заметим, что можно было бы провести выкладки, вычисляя ротор от обеих частей уравнения (7.23) и исключая поле  $\vec{E}$  из получающегося уравнения с помощью уравнения (7.22). На этом пути приходят к уравнению

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{H}. \quad (7.31)$$

Оказывается, что и векторное поле  $\vec{H}$  имеет волновой характер, причем фазовая скорость волны  $\vec{H}$  совпадает с фазовой скоростью волны  $\vec{E}$ .

Анализ системы уравнений (7.27) и (7.31) на первый взгляд приводит к выводу, что волны  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  совершенно независимы друг от друга. На самом деле это не так. Если исследовать решения уравнений (7.22) и (7.23) непосредственно, оказывается, что плоские волны  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  специальным образом ориентированы друг относительно друга, имеют одну и ту же начальную фазу колебаний и согласованные между собой амплитуды. Частоты и волновые векторы у этих волн одинаковы.

Интересно, почему система уравнений (7.27), (7.31) не позволяет все это обнаружить? Дело в том, что система (7.27), (7.31) получена из исходных уравнений (7.22)- (7.23) дифференцированием: исходная система - это система двух дифференциальных уравнений первого порядка, а конечная - система двух уравнений второго порядка. Повышение порядка производных в уравнении расширяет класс допустимых решений. Формально независимые волны  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  как решения системы (7.27), (7.31) содержат, в частности, и такие, которые являются решениями системы (7.22)- (7.23) с описанными выше свойствами, т. е. реальные электромагнитные волны.

В реальной бегущей электромагнитной волне отличен от нуля средний по времени вектор Умова-

## Пойтинга

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(t) dt \neq 0, \quad (7.32)$$

что позволяет говорить о том, что бегущая электромагнитная волна переносит энергию. Среднее по времени значение  $\vec{S}/c$  является плотностью потока импульса, а величина  $\langle \vec{S} \rangle / c^2$  - плотность потока "массы", переносимой электромагнитной волной. Наличие нулевой величины плотности импульса теоретически позволяет рассчитать силу давления, которое оказывает электромагнитная волна на твердую не абсолютно прозрачную поверхность.

В момент создания системы уравнений Максвелла экспериментально электромагнитные волны не были известны. Их несколько позже обнаружил Г.Герц. Тот факт, что свет является совокупностью электромагнитных волн, стало неоспоримым после знаменитых опытов Лебедева по измерению давления света. Теория электродинамики Максвелла стала общепризнанной.

[предыдущая](#) | [наверх](#) | [следующая](#)

© 2002. МГТУ им. Н.Э.Баумана | Designed by krE[S]ote



[об учебнике](#) | [содержание](#) | [поиск](#)



## ГЛАВА 8. Классическая электродинамика и специальная теория относительности

Почти 400 лет тому назад Галилео Галилей сформулировал тезис, согласно которому никаким физическим опытом невозможно определить, движется ли инерциальная система отсчета или нет, если наблюдатель находится в этой системе. Осознание относительности движения привело к установлению принципа, согласно которому описание физического явления не должно зависеть от выбора инерциальной системы отсчета (принцип инвариантности). Физически этот принцип требует, чтобы уравнения электродинамики, в частности, записанные в "неподвижной" системе отсчета, имели бы точно такой же вид в системе отсчета, двигающейся в пространстве с постоянной скоростью. При переходе из одной системы отсчета в другую координаты точки наблюдения и физические величины подвергаются преобразованиям. В классической механике Ньютона- Лагранжа преобразования Галилея являлись выражением теории относительности Галилея.

Система уравнений классической электродинамики, созданная трудами Д.К. Максвелла, Г. Герца и О. Хевисайда была записана для "неподвижной" системы отсчета. Г. Лоренц поставил перед собой задачу: найти преобразования, которые позволяли бы записать уравнения Максвелла в системе отсчета, движущейся относительно наблюдателя, причем форма записи этих уравнений через новые переменные должна совпадать с формой записи в исходной системе отсчета.

Ниже рассмотрим систему отсчета  $K$ , условно неподвижную, и систему отсчета  $K'$ , которая движется вдоль оси  $X$  системы  $K$  с постоянной скоростью  $v$ , причем в какой-то момент времени система координат  $K'$  совпадала (для удобства выкладок, но не более того) с системой координат  $K$ . Напомним, что обе системы координат декартовы.

Преобразования Лоренца для координат точки наблюдения и времени имеют вид (для рассматриваемого случая):

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (8.1)$$

Обратные преобразования получаются из (8.1) сменой знака у  $v$  и заменой штрихованных величин на не штрихованные:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (8.2)$$

Для компонент вектора напряженности электрического поля преобразования Лоренца имеют вид:

$$E'_{x'} = E_x, \quad E'_{y'} = \frac{E_y - \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad E'_{z'} = \frac{E_z + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (8.3)$$

Для компонент вектора индукции магнитного поля преобразования Лоренца имеют вид:

$$B'_{x'} = B_x, \quad B'_{y'} = \frac{B_y + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_z}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad B'_{z'} = \frac{B_z - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_y}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (8.4)$$

Для компонент вектора поляризованности среды  $\vec{P}$  имеют место соотношения:

$$P'_{x'} = P_x, \quad P'_{y'} = \frac{P_y - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_z}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad P'_{z'} = \frac{P_z + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_y}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (8.5)$$

Похожие соотношения верны и для вектора намагниченности  $\vec{M}$ :

$$M'_{x'} = M_x, \quad M'_{y'} = \frac{M_y - \mathbf{v} \cdot \mathbf{P}_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad M'_{z'} = \frac{M_z + \mathbf{v} \cdot \mathbf{P}_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (8.6)$$

Для объемной плотности заряда имеем:

$$\rho' = \frac{\rho + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (8.7)$$

а для объемной плотности тока  $\vec{j}$

$$j'_{x'} = \frac{j_x + \mathbf{v} \cdot \rho}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad j'_{y'} = j_y, \quad j'_{z'} = j_z. \quad (8.8)$$

В приведенных выше соотношениях выражения  $\beta = \mathbf{v}/c$ .

Заметим, что в силу преобразований Лоренца

$$V' = V \cdot \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (8.9)$$

поэтому при  $j_x = 0$  получаем

$$\mathbf{q}' = \rho' \cdot V' = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot V \cdot \sqrt{1 - \beta^2} = \rho \cdot V = \mathbf{q}. \quad (8.10)$$

Говорят, что величина электрического заряда является инвариантом относительно преобразований Лоренца.

Соотношений (8.3)- (8.8) достаточно, чтобы рассчитать значения всех компонент электромагнитного поля в системе отсчета  $K'$ .

Стоит задуматься над тем фактом, что если принять как постулат соотношения (8.3)- (8.8), то система уравнений Максвелла в "штрихованной системе" сводится к системе уравнений Максвелла в не штрихованной, исходной системе отсчета. Справедливо и обратное: если инвариантность записи системы уравнений Максвелла требовать как условие, то при преобразовании координат и времени (8.1)- (8.2) получим соотношения (8.3)- (8.8).

Дифференциальная форма уравнений Максвелла содержит частные производные по пространственным переменным и времени.

Переменные  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , и  $t'$  можно в общем случае рассматривать как переменные, от которых зависят "исходные" координаты и время:

$$x = x(x', y', z', t'), \quad y = y(x', y', z', t'),$$

$$z = z(x', y', z', t'), \quad t = t(x', y', z', t').$$

В этом случае из математического анализа следует:

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x'}$$

и так далее.

Для рассматриваемого случая имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial}{\partial t}; \quad \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y};$$
(8.11)

$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}; \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Рассмотрим проекцию на ось  $x$  уравнения

$$\mathit{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

т.е.

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = - \frac{\partial B_x}{\partial t}.$$
(8.12)

Если инвариантность имеет место, то

$$\frac{\partial E'_{z'}}{\partial y'} - \frac{\partial E'_{y'}}{\partial z'} = - \frac{\partial B'_{x'}}{\partial t'}. \quad (8.13)$$

В уравнении (8.13) используем соотношения (8.3) и (8.4) и операторные соотношения (8.11):

$$\frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial z'} \left( \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = - \left( \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial B_x}{\partial t} \right).$$

Легко получим:

$$v \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = - \frac{\partial B_x}{\partial t}$$

Поскольку  $\text{div} \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$ , приходим к уравнению (8.12).

Подобным образом можно убедиться в том, что при справедливости соотношений (8.1)- (8.8) система уравнений Максвелла в одной системе координат переходит в систему уравнений Максвелла во второй системе координат.

Из соотношений (8.3)- (8.8) непосредственно следует, что электромагнитное поле обладает двумя инвариантными величинами по отношению к преобразованиям Лоренца:

$$\vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2 = \text{inv}. \quad (8.14)$$

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \text{inv}. \quad (8.15)$$

Из соотношения (8.15) в частности следует, что если в какой-либо инерциальной системе отсчета электрическое поле  $\vec{E}$  в точке наблюдения в заданный момент времени окажется перпендикулярным магнитному полю  $\vec{B}$  (т.е.  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ ), то это свойство будет иметь место для всех инерциальных систем.

Если левая часть соотношения (8.14) равна нулю в некоторой инерциальной системе отсчета, что характерно для плоской электромагнитной волны в вакууме, для которой выполнено и вышеописанное условие, то отмеченное свойство будет иметь место во всех инерциальных системах отсчета. Последнее означает, что плоская электромагнитная волна в выбранной системе отсчета будет снова плоской электромагнитной волной в любой другой инерциальной системе отсчета. Соотношения (8.3)- (8.8) подчеркивают относительный (не абсолютный) характер понятий "электрическое поле" и "магнитное поле". Особенно ярко это проявляется в том факте, что если в системе  $K$  поле  $\vec{E}$  равно нулю, то в системе  $K'$  оно отлично от нуля, если в системе  $K$  поле  $\vec{B}$  равно нулю, то в системе  $K'$  оно отлично от нуля.

Интересно и то, что подобными свойствами обладают и векторы поляризованности среды  $\vec{P}$  и намагниченности среды  $\vec{M}$ . Иногда говорят, что "электрические" свойства среды превращаются в "магнитные" свойства и наоборот при переходе от системы  $K$  к системе  $K'$  и обратно. Здесь требуется известная осторожность: поляризованность среды, по определению, не есть свойство среды, а результат воздействия электрического поля. Отсутствие результата воздействия в частном

случае совсем не означает потерю свойства среды становиться поляризованной. Подобное исследование можно было бы провести относительно величин  $\rho$  и  $\vec{j}$ .

Заметим, что для инерциальных систем отсчета, медленно движущихся относительно выбранной системы отсчета, если выполнено условие  $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$ , то преобразования Лоренца для координат и времени сводятся к преобразованиям Галилея:

$$x' = x - v \cdot t, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (8.16)$$

Для компонент электрического поля получаем из (8.3)

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}. \quad (8.17)$$

В соотношении (8.17) легко просматривается выражение для силы Лоренца - ее определение лежало в основе понятий электрического и магнитного поля в самом начале настоящего курса. Теперь становится ясным, что сила Лоренца (соотношение (8.17)) по форме записи справедлива только для "медленных" движений заряженной материальной точки.

Внимательный читатель наверняка заметил, что приведенные выше общие утверждения подкреплены анализом простейшей физической ситуации: система  $K'$  двигалась относительно системы  $K$  весьма специфическим образом. Если скорость  $\vec{v}$  системы  $K'$  относительно системы  $K$  имеет произвольное направление, то преобразования Лоренца для координат можно записать в виде:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \frac{\vec{v}t}{\sqrt{1-\beta^2}} + \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) (\vec{r} \cdot \vec{v}) \frac{\vec{v}}{v^2}, \quad (8.18)$$

$$t' = \frac{t - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Преобразования Лоренца для составляющих векторов электрического и магнитного полей и в этом случае получены, но результаты при этом достаточно громоздки и не добавляют ничего принципиально нового к тому, что можно получить из рассмотренной выше схемы.

Математический аппарат современной электродинамики основан на представлениях Г. Минковского (четырёхмерное пространство, мир Минковского) и технологии тензорного анализа в общих, не обязательно прямолинейных координатах. Система уравнений электродинамики, записанная с использованием тензора электромагнитного поля в ковариантной форме, удивительно красива.

В заключение отметим, что не имеет смысла смущаться сложностью постулатов, лежащих в основе классической электродинамики. Имеет смысл исследовать совокупность выводов теории, их взаимную непротиворечивость и, главное, соответствие опыту, практике. Сто лет тому назад перед физиками стоял вопрос, что исправлять - механику Ньютона или электродинамику Максвелла? Сегодня ответ на этот вопрос известен.



## С о д е р ж а н и е

### ВВЕДЕНИЕ

### ГЛАВА 1. Электростатическое поле в вакууме

- 1.1. Закон Кулона
- 1.2. Принцип суперпозиции для вектора напряженности электростатического поля
- 1.3. Потенциал электростатического поля
- 1.4. Теорема Гаусса для напряженности электростатического поля
- 1.5. Уравнение Пуассона для потенциала электростатического поля. Понятие о краевых задачах в теории потенциала и методах их решения

### ГЛАВА 2. Электростатическое поле в веществе (феноменологическое описание)

- 2.1. Электрический диполь. Электрическое поле диполя
- 2.2. Электрический диполь во внешнем электрическом поле
- 2.3. Поляризованность среды. Диэлектрики и электреты
- 2.4. Теорема Гаусса для вектора поляризованности среды в интегральной и дифференциальной формах
- 2.5. Вектор  $D$ . Теорема Гаусса для вектора  $D$  в интегральной и дифференциальной формах
- 2.6. Соотношения на границе раздела двух диэлектриков для электрических величин

### ГЛАВА 3. Стационарное магнитное поле в вакууме

- 3.1. опыты Эрстеда. опыты Ампера. опыты Кулона. закон Био- Савара-Лапласа
- 3.2. Дифференциальная и интегральная формы теоремы Гаусса для вектора индукции магнитного поля
- 3.3. Векторный потенциал магнитного поля. Вихревой характер магнитного поля

### ГЛАВА 4. Магнитное поле в веществе (феноменологическое описание)

- 4.1. Магнитный диполь
- 4.2. Магнитное поле контура с током
- 4.3. Магнитный диполь во внешнем магнитном поле
- 4.4. Магнитное поле в веществе. Гипотеза Ампера о молекулярных токах. Намагниченность вещества. свойство намагниченности вещества. напряженность магнитного поля
- 4.5. Соотношения на границе раздела двух магнетиков

### ГЛАВА 5. Квазистационарные магнитные явления

- 5.1. Индуктивность
- 5.2. явление электромагнитной индукции

### ГЛАВА 6. Молекулярно-кинетические представления об электромагнитных свойствах сред

- 6.1. Материальные уравнения среды
- 6.2. Природа электрического тока в веществе
- 6.3. Магнетики

6.4. Классическая теория электропроводности металлов Друде

6.5. Намагничивание парамагнетиков и поляризация диэлектриков внешним полем

## **ГЛАВА 7. Система уравнений максвелла как основа классической электродинамики**

7.1. Дифференциальная и интегральная формы системы уравнений Максвелла. Физическое содержание теории Максвелла

7.2. Основные свойства системы уравнений Максвелла

7.3. Основные следствия системы уравнений Максвелла

## **ГЛАВА 8. Классическая электродинамика и специальная теория относительности**

[титульная страница](#) | [наверх](#)

## Поиск

Введите фрагмент для поиска:		Точно
Не учитывать порядок слов	Искать словосочетание	
Выдавать по	результатов на странице.	
Показывать не более	предложений из одного параграфа.	

При расширенном поиске осуществляется сканирование всего текста учебника и, таким образом, если искомый фрагмент существует в тексте, то Вы обязательно получите информацию о том, в каком разделе этот фрагмент находится. Однако процесс поиска может занять от 9 до 30 секунд в зависимости от загруженности сервера.

Включение флажка "*Точно*" позволяет искать только слова (словосочетания) строго соответствующие введенному фрагменту для поиска. Если этот флажок выключен, то подходящими считаются слова и выражения, содержащие введенный фрагмент. Например, если флажок "*Точно*" выключен, при запросе "**одно**" подходящими будут считаться разделы, содержащие слова: "**одно**", "**одного**", "**исходного**", "**свободного**" и т.п. Используйте это при построении запросов.

Положение переключателя "*Не учитывать порядок слов*" означает, что подходящими будут считаться предложения, содержащие все искомые слова без учета их взаимного расположения в предложении.

Положение переключателя "*Искать словосочетание*" означает, что порядок слов в запросе будет учтен при поиске.

Минимальная длина запроса - три буквы.

[титульная страница](#) | [наверх](#)